CHƯƠNG IV: GIỚI HẠN

BÀI 1: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. LÝ THUYẾT

I. Giới hạn 0

1. Định nghĩa:

Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn bằng 0 khi n tiến ra dương vô cực nếu với mỗi số dương nhỏ tuỳ ý cho trước, mọi số hạng của dãy số , kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá tri tuyệt dối nhỏ hơn số dương đó.

Kí hiệu: $\lim u_n = 0$ .Hay là: $\lim\limits_{x\to 0} u_n = 0$

2. Một số giới hạn đặc biệt

- $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ với $k \in \mathbb{N}*$
- Nếu $|q| < 1$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

II. Giới hạn hữu hạn

1. Định nghĩa:

Ta nói rằng dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn a nếu $\lim(u_n - a) = 0$ .Khi đó ta viết: $\lim u_n = a \Leftrightarrow \lim(u_n - a) = 0$,

Dãy số (u_n) có giới hạn là số thực gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

Chú ý: Nếu $u_n = c$ (với c là hằng số) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c = c$

2. Một số định lí về giới hạn

Định lí 1. Nếu dãy số (u_n) thỏa $|u_n| < v_n$ kể từ số hạng nào đó trở đi và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

Định lí 2. Cho $\lim u_n = a,\ \lim v_n = b$. Ta có:

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- $\lim(u_n.v_n) = a.b$
- $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}\ (b \neq 0)$
- Nếu $u_n \geq 0\ \forall n$ thì $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$

3. Tổng của CSN lùi vô hạn

Cho CSN (u_n) có công bội q thỏa $|q|<1$. Khi đó tổng

$S=u_1+u_2+...+u_n+....$ gọi là tổng vô hạn của CSN và

$$S=\lim S_n=\lim\frac{u_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{u_1}{1-q}.$$

III. Giới hạn vô cực

1. Định nghĩa:

Ta nói rằng dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $+\infty \Leftrightarrow$ với mỗi số dương tuỳ ý cho trước , mọi số hạng của dãy số , kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó . Kí hiệu $\lim u_n=+\infty$

Chú ý $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-u_n\right)=+\infty$.

4.2. Một số kết quả đặc biệt

- $\lim n^k=+\infty$ với mọi $k>0$
- $\lim q^n=+\infty$ với mọi $q>1$.

4.3.Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực.

Quy tắc 1: Nếu $\lim u_n=\pm\infty$, $\lim v_n=\pm\infty$ thì $\lim(u_n.v_n)$ được cho như sau;

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc 2: Nếu $\lim u_n=\pm\infty$, $\lim v_n=l$ thì $\lim(u_n.v_n)$ được cho như sau;

$\lim u_n$	Dấu của l	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

Quy tắc 3: Nếu $\lim u_n = l$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ hoặc $v_n < 0$ kể từ một số hạng nào đó trở đi thì $\lim \frac{u_n}{v_n}$ được coi như sau;

Dấu của l	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Giới hạn 0

Phương pháp: Để chứng minh dãy số (u_n) có $\lim u_n = 0$ ta chỉ ra dãy số (v_n) sao $|u_n| < v_n$ kể từ số hạng nào đó trở đi và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

Chú ý : các dãy có giới hạn không được áp dụng

- $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ với $k \in \mathbb{N}^*$
- Nếu $|q| < 1$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

Ví dụ 1: Chứng minh các dãy sau có giới hạn 0

a) $u_n = \frac{n}{n^3+1}$

b) $u_n = \frac{\cos nx}{n+1}$

Giải

a) Ta có $|u_n| = \left|\frac{n}{n^3+1}\right| = \frac{n}{n^3+1} \le \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ Mà $\lim \frac{1}{n^2} = 0 \Rightarrow \lim u_n = 0$

b) Ta có $|u_n| = \left|\frac{\cos nx}{n+1}\right| \le \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n}$ mà $\lim \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim u_n = 0$

Ví dụ 2: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{3^n}$.

a) Chứng minh $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{2}{3}$ với mọi $n \ge 2$

b) Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn 0

Giải

a) Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{3^{n+1}}.\frac{3^n}{n}=\frac{n+1}{3n}<\frac{n+n}{3n}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{2}{3}$

b) Vì $\frac{u_n}{u_{n-1}}<\frac{2}{3}\Rightarrow u_n<\frac{2}{3}u_{n-1}<\left(\frac{2}{3}\right)^2u_{n-2}<...<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}u_1$

lại có $u_1=\frac{1}{3} \Rightarrow u_n<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Có $\lim\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0\Rightarrow \lim u_n=0$

Dang 2: Dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

Phương pháp

- *Đối với dãy* $u_n=\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+...+a_m}{b_0n^k+b_1n^{k-1}+...+b_k}$, $a_0\neq 0, b_0\neq 0$ *thì chia cả tử lẫn mẫu của phân thức cho lũy thừa lớn nhất của n ở tử* n^m *hoặc mẫu* n^k*, việc này cũng như đặt thừa số chung cho* n^m *hoặc mẫu* n^k *rồi rút gọn, khử dạng vô định. Kết quả:*

$$\lim u_n=\begin{cases}0 & khi\ m<k\\ \frac{a_0}{b_0} & khi\ m=k\ (\text{dấu } +\infty \text{ hoặc } -\infty \text{ tùy theo dấu của } \frac{a_0}{b_0})\\ \pm\infty & khi\ m>k\end{cases}$$

- *Đối với biểu thức chứa căn bậc hai, bậc ba thì cũng đánh giá bậc tử và mẫu để đặt thừa số chung rồi đưa ra ngoài căn thức, việc này cũng như chia tử và mẫu cho lũy thừa số lớn của n ở tử hoặc mẫu.*
- *Đối với các biểu thức mũ thì chia tử và mẫu cho mũ có cơ số lớn nhất ở tử hoặc mẫu, việc này cũng như đặt thừa số chung cho tử và mẫu số hạng đó.*

Ví dụ 3 : Tính giới hạn

a) $\lim\frac{n+1}{2n+3}$ b) $\lim\frac{\sqrt{n^2+n}-3n}{1-2n}$

c) $\lim\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n-\sqrt{3n^2+1}}$ d) $\lim\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{3n^3+2}}{\sqrt[4]{2n^4+n+2}-n}$

Giải

a) $\lim\dfrac{n+1}{2n+3}=\lim\dfrac{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(2+\dfrac{3}{n}\right)}=\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{2+\dfrac{3}{n}}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+n}-3n}{1-2n}=\lim\dfrac{n.\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-3n}{1-2n}=\lim\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-3}{\dfrac{1}{n}-2}=\dfrac{1-3}{0-2}=1$

c) Ta có: $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+2n}}{n-\sqrt{3n^2+1}}=\lim\dfrac{\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}}{\dfrac{n-\sqrt{3n^2+1}}{n}}=\lim\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}{1-\sqrt{3+\dfrac{1}{n^2}}}=\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}$

d) Ta có: $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{3n^3+2}}{\sqrt[4]{2n^4+n+2}-n}=\lim\dfrac{n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt[3]{3+\dfrac{2}{n^3}}\right)}{n\left(\sqrt[4]{2+\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2}{n^4}}-1\right)}=\dfrac{1-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{2}-1}$.

Ví dụ 4 : Tính giới hạn

a) $A=\lim\dfrac{4^{n+1}-5^{n+1}}{4^n+5^n}$.

b) $B=\lim\dfrac{4.3^{n+2}-2.7^{n-1}}{4^n+7^{n+1}}$

Giải

a) Chia cả tử và mẫu cho 5^n ta có: $A=\lim\dfrac{4\left(\dfrac{4}{5}\right)^n-5}{\left(\dfrac{4}{5}\right)^n+1}=-5$ (do $\lim\left(\dfrac{4}{5}\right)^n=0$).

b) Ta có: $B=\lim\dfrac{36\left(\dfrac{4}{7}\right)^n-\dfrac{2}{7}}{\left(\dfrac{4}{7}\right)^n+7}=-\dfrac{2}{49}$.

Ví dụ 5 : Tính giới hạn

a) $A=\lim\dfrac{n\sqrt{1+3+5+\ldots+(2n-1)}}{2n^2+1}$

b) $B=\lim\dfrac{\sqrt{1+2+\ldots+n}-n}{\sqrt[3]{1^2+2^2+\ldots+n^2}+2n}$

c) $C=\lim\left[\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)\right]$

d) $D=\lim\left[\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$

Giải

a) Ta có: $1+3+5+\ldots+2n-1=n^2$

Suy ra $A = \lim \dfrac{n^2}{2n^2+1} = \lim \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{2}$.

b) Ta có: $1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$; $\quad 1^2+2^2+...+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Suy ra : $B = \lim \dfrac{\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}} - n}{\sqrt[3]{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}} + 2n} = \lim \dfrac{\sqrt{\dfrac{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{2}} - n}{\sqrt[3]{\dfrac{n^3\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{6}} + 2n} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{2}} - 1}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}} + 2}$

c) Ta có: $1 - \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{(k-1)(k+1)}{k^2}$

$\Rightarrow \left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)...\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1.3}{2^2}.\dfrac{2.4}{3^2}...\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \dfrac{n+1}{2n}$

Do vậy $C = \lim \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2}$.

d) Ta có $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} \Rightarrow \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$

Vậy $D = \lim\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1$.

Dạng 3: Dạng vô định $a.\infty\,(a \neq 0)$

Phương pháp : Nhóm số mũ to nhất

Ví dụ 6 : Tính giới hạn

a) $\lim\left(n^2 - 4n + 1\right)$ $\qquad$ b) $\lim\left(\sqrt{2n^2+1} - n\right)$

Giải

a) $\lim\left(n^2 - 4n + 1\right) = \lim n^2\left(1 - \dfrac{4}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$

Vì $\begin{cases} \lim n^2 = +\infty \\ \lim\left(1 - \dfrac{4}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) = 1 > 0 \end{cases}$ nên $\lim\left(n^2 - 4n + 1\right) = +\infty$

b) $\lim\left(\sqrt{2n^2+1} - n\right) = \lim n\left(\sqrt{2 + \dfrac{1}{n}} - 1\right)$

Vì $\begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim\left(\sqrt{2 + \dfrac{1}{n}} - 1\right) = 1 \end{cases}$ nên $\lim\left(\sqrt{2n^2+1} - n\right) = +\infty$

Dạng 4: Dạng vô đinh $0.\infty$

Phương pháp

- *Đối với biểu thức chứa căn thức thì nhân, chia lượng liên hợp bậc hai, bậc ba để đưa về dạng:*

$$\sqrt{A}+B=\frac{A-B^2}{\sqrt{A}-B} \qquad \sqrt[3]{A}+B=\frac{A+B^3}{\sqrt[3]{A^2}-B.\sqrt[3]{A}+B^2}$$

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}=\frac{A-B}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} \qquad \sqrt[3]{A}-B=\frac{A-B^3}{\sqrt[3]{A^2}+B.\sqrt[3]{A}+B^2}$$

$$\sqrt{A}-B=\frac{A-B^2}{\sqrt{A}+B} \qquad \sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\frac{A+B}{\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{A.B}+\sqrt[3]{B^2}}$$

$$\sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} \qquad \sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}=\frac{A-B}{\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{A.B}+\sqrt[3]{B^2}}$$

- *Đặc biệt, đôi khi ta thêm, bớt đại lượng đơn giản để xác định các giới hạn mới có cùng dạng vô định, chẳng hạn:*

$$\sqrt[3]{n^3+2}-\sqrt{n^2+1}=\left(\sqrt[3]{n^3+2}-n\right)+\left(n-\sqrt{n^2+1}\right);$$

$$\sqrt{n^2+n}+\sqrt[3]{2-n^3}=\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)+\left(n+\sqrt[3]{2-n^3}\right)$$

Ví dụ7 : Tính giới hạn

a) $\lim\left(\sqrt{n^2-3n}-n\right)$ b) $\lim\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)$

c) $\lim\left(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n^2+5}\right)$ d) $\lim\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2}\right)$

Giải

a) $$\lim\left(\sqrt{n^2-3n}-n\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2-3n}-n\right)\left(\sqrt{n^2-3n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2-3n}+n\right)}=\lim\frac{-3n}{\sqrt{n^2-3n}+n}$$

$$=\lim\frac{-3n}{\sqrt{n^2\left(1-\frac{3}{n}\right)}+n}=\lim\frac{-3n}{n\left(\sqrt{1-\frac{3}{n}}+1\right)}=-\frac{3}{2}$$

b) $$\lim\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)=\lim\frac{\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)\left(\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}.\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}\right)}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}.\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}$$

$$=\lim\frac{\left(\sqrt[3]{n+2}\right)^3-\left(\sqrt[3]{n}\right)^3}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}.\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}=\lim\frac{n+2-n}{\sqrt[3]{(n+2)^2}+\sqrt[3]{n+2}.\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}$$

$$= \lim \frac{2}{\sqrt[3]{(n+2)^2} + \sqrt[3]{n+2}.\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n^2}} = 0$$

c) $\lim\left(\sqrt{n^2+7} - \sqrt{n^2+5}\right) = \lim \frac{n^2+7-n^2-5}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+5}} = \lim \frac{2}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+5}} = 0$

d) $\lim\left(\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2}\right) = \lim\left(\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2}\right) = \lim \frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2}}$

$$= \lim \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1}} = \frac{3}{2}$$

Ví dụ 8 : Tính giới hạn

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n} - \sqrt[3]{n^3+2n^2}\right)$ b) $\lim\left(\sqrt{4n^2+1} - \sqrt[3]{8n^3+n}\right)$

Giải

a) Ta có: $\lim\left(\sqrt{n^2+2n} - \sqrt[3]{n^3+2n^2}\right) = \lim\left(\sqrt{n^2+2n} - n\right) - \lim\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2} - n\right)$

$$= \lim \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} - \lim \frac{2n^2}{\sqrt[3]{(n^3+2n^2)^2} + n\sqrt[3]{n^3+2n^2} + n^2}$$

$$= \lim \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} - \lim \frac{2}{\sqrt[3]{(1+\frac{2}{n})^2} + \sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} + 1} = \frac{1}{3}.$$

b) Ta có: $\lim\left(\sqrt{4n^2+1} - \sqrt[3]{8n^3+n}\right) = \lim\left(\sqrt{4n^2+1} - 2n\right) - \lim\left(\sqrt[3]{8n^3+n} - 2n\right)$

Mà: $\lim\left(\sqrt{4n^2+1} - 2n\right) = \lim \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}+2n} = 0$

$\lim\left(\sqrt[3]{8n^2+n} - 2n\right) = \lim \frac{n}{\sqrt[3]{(8n^2+n)^2} + 2n\sqrt[3]{8n^2+n} + 4n^2} = 0$

Vậy $\lim\left(\sqrt{4n^2+1} - \sqrt[3]{8n^3+n}\right) = 0$.

Dạng 5: Cấp số nhân lùi vô hạn

Phương pháp:

Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân vô hạn và có công bội là $|q| < 1$.

- Tổng các số hạng của một cấp số nhân lùi vô hạn (u_n)

$$S = u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \frac{u_1}{1-q}$$

- Mọi số thập phân đều được biểu diễn dưới dạng lũy thừa của 10

$$X = N, a_1a_2a_3...a_n = N + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + ... + \frac{a^n}{10^n} + ...$$

Ví dụ 9. Viết số thập phân $m = 0,030303\ \ldots$ (chu kỳ 03) dưới dạng số hữu tỉ.

Giải

$$m = 3 + \frac{3}{100} + \frac{3}{10000} + \ldots + \frac{3}{100^n} = 3 + \frac{\frac{3}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 3 + \frac{3}{99} = 3 + \frac{1}{33} = \frac{100}{33}$$

Ví dụ 10. Tính tổng $S = 2 - \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \ldots$

Giải

Xét dãy: $2, -\sqrt{2}, 1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots$ là cấp số nhân $q = \frac{-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}; |q| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

Vậy $S = \frac{2}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = 4 - 2\sqrt{2}$

Ví dụ 11 . Hãy viết số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng một phân số. $\alpha = 34,1212\ldots$ (chu kỳ 12)

Giải

$$\alpha = 34,1212\ldots = 34 + \frac{12}{100} + \frac{12}{100^2} + \ldots + \frac{12}{100^n} = 34 + 12\left(\frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}}\right) = \frac{1134}{33}$$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0 ?

A. $\frac{1-2n}{5n+3n^2}$. **B.** $\frac{1-2n^2}{5n+3n^2}$.

C. $u_n = \frac{n^2-2n}{5n+3n^2}$. **D.** $u_n = \frac{n^2-2}{5n+3n^2}$.

Câu 2: $\lim \frac{3n^3 - 2n + 1}{4n^4 + 2n + 1}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $\frac{2}{7}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 3: $\lim \frac{2}{5n^4 - 2n + 1}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{2}{5}$.

Câu 4: Tính $\lim \frac{n + 2n^2}{n^3 + 3n - 1}$. Kết quả là

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 0.

Câu 5: Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim\frac{3+2n^3}{2n^2-1}$. **B.** $\lim\frac{2n^2-3}{-2n^3-4}$.

C. $\lim\frac{2n-3n^3}{-2n^2-1}$. **D.** $\lim\frac{2n^2-3n^4}{-2n^3+n^2}$.

Câu 6: $\lim\frac{-3}{4n^2-2n+1}$ bằng

A. $-\frac{3}{4}$. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** -1.

Câu 7: Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $u_n=\frac{n^2-2}{5n+3n^2}$. **B.** $u_n=\frac{n^2-2n}{5n+3n^2}$.

C. $u_n=\frac{1-2n^2}{5n+3n^2}$. **D.** $u_n=\frac{1-2n}{5n+3n^2}$.

Câu 8: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^k}$ (với k nguyên dương) là

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** x.

Câu 9: Tính $\lim\frac{n+2n^3}{3n^3-2n-1}$. Kết quả là

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 0.

Câu 10: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là 0?

A. $\lim\frac{2^n+3}{1-2^n}$. **B.** $\lim\frac{(2n+1)(n-3)^2}{n-2n^3}$.

C. $\lim\frac{1-n^3}{n^2+2n}$. **D.** $\lim\frac{2^n+1}{3.2^n-3^n}$.

Câu 11: Kết quả $\lim\frac{3-2n+4n^2}{4n^2+5n-3}$ là

A. $\frac{3}{4}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $-\frac{4}{3}$.

Câu 12: Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng -1?

A. $\lim\frac{2n^2-3}{-2n^3-4}$. **B.** $\lim\frac{2n^2-3}{-2n^2-1}$.

C. $\lim \dfrac{2n^2-3}{-2n^3+2n^2}$. **D.** $\lim \dfrac{2n^3-3}{-2n^2-1}$.

Câu 13: $\lim \dfrac{n^3+4n-5}{3n^3+n^2+7}$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 14: Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng $\dfrac{1}{5}$?

A. $u_n = \dfrac{1-2n^2}{5n+5}$. **B.** $u_n = \dfrac{1-2n}{5n+5n^2}$.

C. $u_n = \dfrac{n^2-2n}{5n+5n^2}$. **D.** $u_n = \dfrac{1-2n}{5n+5}$.

Câu 15: $\lim \dfrac{5n^2-3n^4}{4n^4+2n+1}$ bằng

A. $-\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** 0.

Câu 16: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là 0?

A. $\lim \dfrac{2^n+3}{1-2^n}$. **B.** $\lim \dfrac{(2n+1)(n-3)^2}{n-2n^3}$.

C. $\lim \dfrac{1-n^3}{n^2+2n}$. **D.** $\lim \dfrac{2^n+1}{3.2^n-3^n}$.

Câu 17: Cho $u_n = \dfrac{1-4n}{5n}$. Khi đó $\lim u_n$ bằng

A. $\dfrac{4}{5}$. **B.** $-\dfrac{3}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{5}$. **D.** $-\dfrac{4}{5}$.

Câu 18: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5}$. Để (u_n) có giới hạn bằng 2, giá trị của a là

A. -4. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 19: Dãy số (u_n) với $(u_n) = \dfrac{n^2+n+5}{2n^2+1}$ có giới hạn bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 20: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n+b}{5n+3}$. Để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn thì giá trị của b là

A. b là một số thực tùy ý.

B. b nhận một giá trị duy nhất là 2.

C. b nhận một giá trị duy nhất là 3.

D. b nhận một giá trị duy nhất là 5.

Câu 21: $\lim\frac{2n^3-5n+3}{3n^3-n^2}$ là

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Câu 22: Cho $u_n=\frac{1}{n+1}$ và $v_n=\frac{2}{n+2}$. Khi đó $\lim\frac{v_n}{u_n}$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 23: Dãy số nào sau đây có giới hạn $-\frac{1}{3}$?

A. $u_n=\frac{-n^4+2n^3-1}{3n^3+2n^2-1}$. **B.** $u_n=\frac{-2n+n^2}{3n^2+5}$.

C. $u_n=\frac{n^2-3n^3}{9n^3+n^2-1}$. **D.** $u_n=\frac{-n^2+2n-5}{3n^3+4n-2}$.

Câu 24: $\lim\frac{10^4n}{10^4+2n}$ bằng bao nhiêu?

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** 1000. **D.** 5000.

Câu 25: Dãy số (u_n) với $(u_n)=\frac{n^2+n+5}{2n^2+1}$ có giới hạn bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 26: Tính $\lim\frac{5n+2}{3n-1}$ ta được kết quả

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{5}{9}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 27: $\lim\frac{2n^4-2n+2}{4n^4+2n+5}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** $\frac{3}{11}$.

Câu 28: Dãy số (a_n) với $a_n=\frac{2n}{n+2}$, $n = 1, 2, \ldots$ có giới hạn bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 29: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{an+4}{5n+3}$, trong đó a là hằng số. Để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 2, giá trị của a là

A. 10. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 30: Dãy số nào sau đây có giới hạn $-\dfrac{1}{3}$?

A. $u_n = \dfrac{-n^3+2n-1}{3n^3+2n^2-1}$. **B.** $u_n = \dfrac{-2n+n^2}{3n^2+5}$.

C. $u_n = \dfrac{n^2-3n^4}{9n^3+n^2-1}$. **D.** $u_n = \dfrac{-n^2+2n-5}{3n^3+4n-2}$.

Câu 31: $\lim \dfrac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Câu 32: Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n^2+n+5}{2n^2+1}$ có giới hạn bằng:

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 33: Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào bằng -1?

A. $\lim \dfrac{n^2-n^3}{2n^3+1}$. **B.** $\lim \dfrac{2n+3}{2-3n}$.

C. $\lim \dfrac{n^2+n}{-2n-n^2}$. **D.** $\lim \dfrac{n^3}{n^2+3}$.

Câu 34: Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào bằng $+\infty$?

A. $\lim \dfrac{2n^2-3n}{n^3+3n}$. **B.** $\lim \dfrac{n^2-3n+2}{n^2+n}$.

C. $\lim \dfrac{n^3+2n-1}{n-2n^3}$. **D.** $\lim \dfrac{n^2-n+1}{2n-1}$.

Câu 35: Giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{3n-n^4}{4n-5}$ có giới hạn bằng

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Câu 36: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây?

A. $\lim \dfrac{n^4+2}{n^3+1} = +\infty$. **B.** $\lim \dfrac{n^2+5}{2n+1} = -\infty$.

C. $\lim \dfrac{2n^2+n+1}{3-n} = +\infty$. **D.** $\lim \dfrac{1}{2+3n} = +\infty$.

Câu 37: Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào bằng $+\infty$?

A. $\lim\frac{2n-3n^2}{2n^2-1}$. **B.** $\lim\frac{3+2n^3}{2n^2-1}$.

C. $\lim\frac{2n^2+3n^4}{-2n^3+n^2}$. **D.** $\lim\frac{2n^2+3}{n^3+4}$.

Câu 38: $\lim\frac{n^3-2n}{1-3n^2}$ bằng

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 39: Kết quả $L=\lim\left(5n-3n^3\right)$ bằng

A. -4. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** -6.

Câu 40: Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào bằng $+\infty$?

A. $u_n=\frac{1+2n}{5n+5n^2}$. **B.** $u_n=\frac{n^2-2}{5n+5n^3}$.

C. $u_n=\frac{n^2-2n}{5n+5n^2}$. **D.** $u_n=\frac{1+n^2}{5n+5}$.

Câu 41: Kết quả $L=\lim\left(3n^2+5n-3\right)$ là

A. 3. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 5.

Câu 42: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là $+\infty$?

A. $\lim\frac{2n^2-3n}{n^3+3n}$. **B.** $\lim\frac{n^2-3n+2}{n^2+n}$.

C. $\lim\frac{n^3+2n-1}{n-2n^3}=-\frac{1}{2}$. **D.** $\lim\frac{n^2-n+1}{2n-1}$.

Câu 43: $\lim\left(2n-3n^3\right)$ là:

A. 2. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** -3.

Câu 44: $\lim\left(-3n^3+2n^2-5\right)$ bằng

A. -3. **B.** -6. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 45: $\lim\frac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}$ bằng

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Câu 46: Dãy số nào sau đây có giới hạn $+\infty$?

A. $u_n=\frac{9n^2+7n}{n+n^2}$. **B.** $u_n=2008n-2007n^2$.

C. $u_n = \dfrac{2007 + 2008n}{n+1}$. **D.** $u_n = n^2 + 1$.

Câu 47: Dãy số nào sau đây có giới hạn là $-\infty$?

A. $u_n = 3n^2 - n$. **B.** $u_n = n^4 - 3n^3$.

C. $u_n = -n^2 + 4n^3$. **D.** $u_n = 3n^3 - 2n^4$.

Câu 48: $\lim \dfrac{100n^3 + 7n - 9}{1000n^2 - n + 1}$ là

A. -9. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{1}{10}$.

Câu 49: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là $+\infty$?

A. $\lim \dfrac{2n^2 - 3n}{n^3 + 3n}$. **B.** $\lim \dfrac{n^2 - 3n + 2}{n^2 + n}$.

C. $\lim \dfrac{n^3 + 2n - 1}{n - 2n^2}$. **D.** $\lim \dfrac{n^2 - n + 1}{2n - 1}$.

Câu 50: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\lim \dfrac{1}{2 + 3n} = +\infty$. **B.** $\lim \dfrac{n^2 + 5}{2n + 1} = -\infty$.

C. $\lim \dfrac{2n^2 + n + 1}{3 - n} = +\infty$. **D.** $\lim \dfrac{n^4 + 2}{n^3 + 1} = +\infty$.

BẢNG ĐÁP SỐ

1.A	**2.B**	**3.B**	**4.D**	**5.B**	**6.C**	**7.D**	**8.C**	**9.C**	**10.D**
11.C	**12.B**	**13.A**	**14.C**	**15.A**	**16.D**	**17.D**	**18.B**	**19.B**	**20.A**
21.B	**22.B**	**23.C**	**24.D**	**25.B**	**26.B**	**27.B**	**28.C**	**29.A**	**30.A**
31.D	**32.B**	**33.C**	**34.D**	**35.A**	**36.A**	**37.C**	**38.C**	**39.B**	**40**
41.C	**42.D**	**43.C**	**44.C**	**45.B**	**46.D**	**47.D**	**48.B**	**49.D**	**50.D**

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0 ?

A. $\dfrac{1-2n}{5n+3n^2}$. **B.** $\dfrac{1-2n^2}{5n+3n^2}$.

C. $u_n=\dfrac{n^2-2n}{5n+3n^2}$. **D.** $u_n=\dfrac{n^2-2}{5n+3n^2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\lim\dfrac{1-2n}{5n+3n^2}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{2}{n}}{\dfrac{5}{n}+3}=0$

Câu 2: $\lim\dfrac{3n^3-2n+1}{4n^4+2n+1}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{2}{7}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\lim\frac{3n^3-2n+1}{4n^4+2n+1}=\lim\frac{\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}}{4+\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}}=0$$

Câu 3: $\lim\dfrac{2}{5n^4-2n+1}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{2}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\lim\frac{2}{5n^4-2n+1}=\lim\frac{\dfrac{2}{n^4}}{5-\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}}=0$$

Câu 4: Tính $\lim\dfrac{n+2n^2}{n^3+3n-1}$. Kết quả là

A. 2. **B.** 1. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\lim\frac{n+2n^2}{n^3+3n-1}=\lim\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}=0$$

Câu 5: Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim\frac{3+2n^3}{2n^2-1}$. **B.** $\lim\frac{2n^2-3}{-2n^3-4}$.

C. $\lim\frac{2n-3n^3}{-2n^2-1}$. **D.** $\lim\frac{2n^2-3n^4}{-2n^3+n^2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\lim\frac{2n^2-3}{-2n^3-4}=\lim\frac{\frac{2}{n}-\frac{3}{n^3}}{-2-\frac{4}{n^3}}=0$$

Câu 6: $\lim\frac{-3}{4n^2-2n+1}$ bằng

A. $-\frac{3}{4}$. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** -1.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\lim\frac{-3}{4n^2-2n+1}=\lim\frac{-\frac{3}{n^2}}{4-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=0$$

Câu 7: Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $u_n=\frac{n^2-2}{5n+3n^2}$. **B.** $u_n=\frac{n^2-2n}{5n+3n^2}$.

C. $u_n=\frac{1-2n^2}{5n+3n^2}$. **D.** $u_n=\frac{1-2n}{5n+3n^2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\lim\frac{1-2n}{5n+3n^2}=\lim\frac{\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}}{\frac{5}{n}+3}=0$$

Câu 8: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^k}$ (với k nguyên dương) là

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** x.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^k}=0$

Câu 9: Tính $\lim\dfrac{n+2n^3}{3n^3-2n-1}$. Kết quả là

A. 2. **B.** 1. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\lim\frac{n+2n^3}{3n^3-2n-1}=\lim\frac{\frac{1}{n^2}+2}{3-\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}=\lim\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

Câu 10: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là 0?

A. $\lim\dfrac{2^n+3}{1-2^n}$. **B.** $\lim\dfrac{(2n+1)(n-3)^2}{n-2n^3}$.

C. $\lim\dfrac{1-n^3}{n^2+2n}$. **D.** $\lim\dfrac{2^n+1}{3.2^n-3^n}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\lim\frac{2^n+1}{3.2^n-3^n}=\lim\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{3.\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}=0$$

Câu 11: Kết quả $\lim\dfrac{3-2n+4n^2}{4n^2+5n-3}$ là

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $-\dfrac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\lim\frac{3-2n+4n^2}{4n^2+5n-3}=\lim\frac{\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n}+4}{4+\frac{5}{n}-\frac{3}{n^2}}=1$$

Câu 12: Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng -1?

A. $\lim\dfrac{2n^2-3}{-2n^3-4}$. **B.** $\lim\dfrac{2n^2-3}{-2n^2-1}$.

C. $\lim\dfrac{2n^2-3}{-2n^3+2n^2}$. **D.** $\lim\dfrac{2n^3-3}{-2n^2-1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\lim\frac{2n^2-3}{-2n^2-1}=\lim\frac{2-\frac{3}{n^2}}{-2-\frac{1}{n^2}}=-1$$

Câu 13: $\lim\dfrac{n^3+4n-5}{3n^3+n^2+7}$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\lim\frac{n^3+4n-5}{3n^3+n^2+7}=\lim\frac{1+\frac{4}{n^2}-\frac{5}{n^3}}{3+\frac{1}{n}+\frac{7}{n^3}}=\frac{1}{3}$$

Câu 14: Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng $\dfrac{1}{5}$?

A. $u_n=\dfrac{1-2n^2}{5n+5}$. **B.** $u_n=\dfrac{1-2n}{5n+5n^2}$.

C. $u_n=\dfrac{n^2-2n}{5n+5n^2}$. **D.** $u_n=\dfrac{1-2n}{5n+5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\lim\frac{n^2-2n}{5n+5n^2}=\lim\frac{1-\frac{2}{n}}{\frac{5}{n}+5}=\frac{1}{5}$$

Câu 15: $\lim\dfrac{5n^2-3n^4}{4n^4+2n+1}$ bằng

A. $-\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\lim\frac{5n^2-3n^4}{4n^4+2n+1}=\lim\frac{\frac{5}{n^4}-3}{4+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}}=\frac{-3}{4}$$

Câu 16: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là 0?

A. $\lim\dfrac{2^n+3}{1-2^n}$. **B.** $\lim\dfrac{(2n+1)(n-3)^2}{n-2n^3}$.

C. $\lim\dfrac{1-n^3}{n^2+2n}$. **D.** $\lim\dfrac{2^n+1}{3.2^n-3^n}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vì: $\lim\dfrac{2^n+1}{3.2^n-3^n}=\lim\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{3.\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-1}=\dfrac{0}{-1}=0$

$\lim\dfrac{2^n+3}{1-2^n}=-1$; $\lim\dfrac{(2n+1)(n-3)^2}{n-2n^3}=-1$; $\lim\dfrac{1-n^3}{n^2+2n}=-\infty$

Câu 17: Cho $u_n=\dfrac{1-4n}{5n}$. Khi đó $\lim u_n$ bằng

A. $\dfrac{4}{5}$. **B.** $-\dfrac{3}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{5}$. **D.** $-\dfrac{4}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$\lim u_n=\lim\dfrac{1-4n}{5n}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n}-4}{5}=-\dfrac{4}{5}$.

Câu 18: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5}$. Để (u_n) có giới hạn bằng 2, giá trị của a là

A. -4. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$\lim u_n=\lim\dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5}=\lim\dfrac{4+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{a+\dfrac{5}{n^2}}=\dfrac{4}{a}=2\Rightarrow a=2$.

Câu 19: Dãy số (u_n) với $(u_n)=\dfrac{n^2+n+5}{2n^2+1}$ có giới hạn bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\lim u_n = \lim \frac{n^2+n+5}{2n^2+1} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Câu 20: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+b}{5n+3}$. Để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn thì giá trị của b là

A. b là một số thực tùy ý.

B. b nhận một giá trị duy nhất là 2.

C. b nhận một giá trị duy nhất là 3.

D. b nhận một giá trị duy nhất là 5.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\lim_{x\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty} \frac{2n+b}{5n+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{b}{n}}{5+\frac{3}{n}} = \frac{2}{5} \text{ vì } \lim_{x\to+\infty} \frac{b}{n} = b \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n} = 0, \forall b \in \mathbb{R}$$

Câu 21: $\lim \frac{2n^3-5n+3}{3n^3-n^2}$ là

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\lim \frac{2n^3-5n+3}{3n^3-n^2} = \lim \frac{2-\frac{5}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{2}{3}$$

Câu 22: Cho $u_n = \frac{1}{n+1}$ và $v_n = \frac{2}{n+2}$. Khi đó $\lim \frac{v_n}{u_n}$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\lim \frac{v_n}{u_n} = \lim \frac{\frac{2}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \lim \frac{2n+2}{n+2} = \lim \frac{2+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 2$$

Câu 23: Dãy số nào sau đây có giới hạn $-\frac{1}{3}$?

A. $u_n = \dfrac{-n^4 + 2n^3 - 1}{3n^3 + 2n^2 - 1}$. **B.** $u_n = \dfrac{-2n + n^2}{3n^2 + 5}$.

C. $u_n = \dfrac{n^2 - 3n^3}{9n^3 + n^2 - 1}$. **D.** $u_n = \dfrac{-n^2 + 2n - 5}{3n^3 + 4n - 2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\lim u_n = \lim \frac{n^2 - 3n^3}{9n^3 + n^2 - 1} = \lim \frac{\frac{1}{n} - 3}{9 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}} = \lim \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

Câu 24: $\lim \dfrac{10^4 n}{10^4 + 2n}$ bằng bao nhiêu?

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** 1000. **D.** 5000.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\lim \frac{10^4 n}{10^4 + 2n} = \lim \frac{10^4}{\frac{10^4}{n} + 2} = \frac{10^4}{2} = 5000$$

Câu 25: Dãy số (u_n) với $(u_n) = \dfrac{n^2 + n + 5}{2n^2 + 1}$ có giới hạn bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\lim u_n = \lim \frac{n^2 + n + 5}{2n^2 + 1} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

Câu 26: Tính $\lim \dfrac{5n + 2}{3n - 1}$ ta được kết quả

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{5}{3}$. **C.** $\dfrac{5}{9}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\lim \frac{5n + 2}{3n - 1} = \lim \frac{5 + \frac{2}{n}}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{5}{3}$$

Câu 27: $\lim \dfrac{2n^4 - 2n + 2}{4n^4 + 2n + 5}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{3}{11}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\lim \frac{2n^4 - 2n + 2}{4n^4 + 2n + 5} = \lim \frac{2 - \frac{2}{n^3} + \frac{2}{n^4}}{4 + \frac{2}{n^3} + \frac{5}{n^4}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Câu 28: Dãy số (a_n) với $a_n = \dfrac{2n}{n+2}$, $n = 1, 2, \ldots$ có giới hạn bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\lim a_n = \lim \frac{2n}{n+2} = \lim \frac{2}{1 + \frac{2}{n}} = 2$$

Câu 29: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{an+4}{5n+3}$, trong đó a là hằng số. Để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 2, giá trị của a là

A. 10. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\lim u_n = \lim \dfrac{an+4}{5n+3} = \lim \dfrac{a + \frac{4}{n}}{5 + \frac{3}{n}} = \dfrac{a}{5}$. Để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 2

thì $\dfrac{a}{5} = 2 \Leftrightarrow a = 10$

Câu 30: Dãy số nào sau đây có giới hạn $-\dfrac{1}{3}$?

A. $u_n = \dfrac{-n^3 + 2n - 1}{3n^3 + 2n^2 - 1}$. **B.** $u_n = \dfrac{-2n + n^2}{3n^2 + 5}$.

C. $u_n = \dfrac{n^2 - 3n^4}{9n^3 + n^2 - 1}$. **D.** $u_n = \dfrac{-n^2 + 2n - 5}{3n^3 + 4n - 2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\lim u_n = \lim \frac{-n^3+2n-1}{3n^3+2n^2-1} = \lim \frac{-1+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^3}} = \lim \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

Câu 31: $\lim \frac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}$ bằng

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\lim \frac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2} = \lim \frac{\frac{1}{n}-3}{2+\frac{5}{n^2}-\frac{2}{n^3}} = -\frac{3}{2}$.

Câu 32: Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n^2+n+5}{2n^2+1}$ có giới hạn bằng:

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có : $\lim u_n = \lim \frac{n^2+n+5}{2n^2+1} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$.

Câu 33: Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào bằng -1?

A. $\lim \frac{n^2-n^3}{2n^3+1}$. **B.** $\lim \frac{2n+3}{2-3n}$.

C. $\lim \frac{n^2+n}{-2n-n^2}$. **D.** $\lim \frac{n^3}{n^2+3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta tính giới hạn lần lượt trong bốn phương án trên.

Xét A: $\lim \frac{n^2-n^3}{2n^3+1} = \lim \frac{\frac{1}{n}-1}{2+\frac{1}{n^3}} = -\frac{1}{2}$

Xét B : $\lim \frac{2n+3}{2-3n} = \lim \frac{2+\frac{3}{n}}{\frac{2}{n}-3} = -\frac{2}{3}$

Xét C: $\lim\frac{n^2+n}{-2n-n^2}=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{-\frac{2}{n}-1}=-1$.

Xét D: $\lim\frac{n^3}{n^2+3}=\lim n.\frac{1}{1+\frac{3}{n^2}}=+\infty$.

Câu 34: Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào bằng $+\infty$?

A. $\lim\frac{2n^2-3n}{n^3+3n}$. **B.** $\lim\frac{n^2-3n+2}{n^2+n}$.

C. $\lim\frac{n^3+2n-1}{n-2n^3}$. **D.** $\lim\frac{n^2-n+1}{2n-1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta tính giới hạn lần lượt trong bốn phương án trên.

Xét A: $\lim\frac{2n^2-3n}{n^3+3n}=\lim\frac{\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}=0$

Xét B $\lim\frac{n^2-3n+2}{n^2+n}=\lim\frac{1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}$

Xét C: $\lim\frac{n^3+2n-1}{n-2n^3}=\lim\frac{1+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}-2}=-\frac{1}{2}$.

Xét D: $\lim\frac{n^2-n+1}{2n-1}=\lim n.\frac{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n}}=+\infty$.

Câu 35: Giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n=\frac{3n-n^4}{4n-5}$ có giới hạn bằng

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $\frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có : $\lim u_n=\lim\frac{3n-n^4}{4n-5}=\lim n^3.\frac{\frac{3}{n^3}-1}{4-\frac{5}{n}}=-\infty$.

Câu 36: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây?

A. $\lim \frac{n^4+2}{n^3+1} = +\infty$. **B.** $\lim \frac{n^2+5}{2n+1} = -\infty$.

C. $\lim \frac{2n^2+n+1}{3-n} = +\infty$. **D.** $\lim \frac{1}{2+3n} = +\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta tính giới hạn lần lượt trong bốn phương án trên.

Xét A : $\lim \frac{n^4+2}{n^3+1} = \lim n.\frac{1+\frac{2}{n^4}}{1+\frac{1}{n^3}} = +\infty$

Xét B : $\lim \frac{n^2+5}{2n+1} = \lim n.\frac{1+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{1}{n}} = +\infty$

Xét C: $\lim \frac{2n^2+n+1}{3-n} = \lim n.\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n}-1} = -\infty$.

Xét D: $\lim \frac{1}{2+3n} = \lim \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}+3} = 0$.

Câu 37: Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào bằng $+\infty$?

A. $\lim \frac{2n-3n^2}{2n^2-1}$. **B.** $\lim \frac{3+2n^3}{2n^2-1}$.

C. $\lim \frac{2n^2+3n^4}{-2n^3+n^2}$. **D.** $\lim \frac{2n^2+3}{n^3+4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta tính giới hạn lần lượt trong bốn phương án trên.

Xét A: $\lim \frac{2n-3n^2}{2n^2-1} = \lim \frac{\frac{2}{n}-3}{2-\frac{1}{n^2}} = -\frac{3}{2}$

Xét B: $\lim \frac{3+2n^3}{2n^2-1} = \lim n.\frac{\frac{3}{n^3}+2}{2-\frac{1}{n^2}} = +\infty$

Xét C: $\lim\dfrac{2n^2+3n^4}{-2n^3+n^2}=\lim n.\dfrac{\dfrac{2}{n^2}+3}{-2+\dfrac{1}{n}}=-\infty$.

Xét D: $\lim\dfrac{2n^2+3}{n^3+4}=\lim\dfrac{\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^3}}{1+\dfrac{4}{n^3}}=0$.

Câu 38: $\lim\dfrac{n^3-2n}{1-3n^2}$ bằng

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có : $\lim\dfrac{n^3-2n}{1-3n^2}=\lim n.\dfrac{1-\dfrac{2}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}-3}=-\infty$.

Câu 39: Kết quả $L=\lim\left(5n-3n^3\right)$ bằng

A. -4. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** -6.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có : $L=\lim\left(5n-3n^3\right)=\lim n^3\left(\dfrac{5}{n^2}-3\right)=-\infty$.

Câu 40: Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào bằng $+\infty$?

A. $u_n=\dfrac{1+2n}{5n+5n^2}$. **B.** $u_n=\dfrac{n^2-2}{5n+5n^3}$.

C. $u_n=\dfrac{n^2-2n}{5n+5n^2}$. **D.** $u_n=\dfrac{1+n^2}{5n+5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta tính giới hạn lần lượt trong bốn phương án trên.

Xét A: $\lim u_n=\lim\dfrac{1+2n}{5n+5n^2}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n}}{\dfrac{5}{n}+5}=0$

Xét B : $\lim u_n=\lim\dfrac{n^2-2}{5n+5n^3}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^3}}{\dfrac{5}{n^2}+5}=0$

Xét C: $\lim u_n = \lim \frac{n^2 - 2n}{5n + 5n^2} = \lim \frac{1 - \frac{2}{n}}{\frac{5}{n} + 5} = \frac{1}{5}$.

Xét D: $\lim u_n = \lim \frac{1 + n^2}{5n + 5} = \lim n.\frac{\frac{1}{n^2} + 1}{5 + \frac{5}{n}} = +\infty$.

Câu 41: Kết quả $L = \lim\left(3n^2 + 5n - 3\right)$ là

A. 3. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\lim\left(3n^2 + 5n - 3\right) = \lim n^2\left(3 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^2}\right) = +\infty$..

Vì $\begin{cases} \lim n^2 = +\infty \\ \lim\left(3 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^2}\right) = 3 > 0 \end{cases}$.

Câu 42: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là $+\infty$?

A. $\lim \frac{2n^2 - 3n}{n^3 + 3n}$. **B.** $\lim \frac{n^2 - 3n + 2}{n^2 + n}$.

C. $\lim \frac{n^3 + 2n - 1}{n - 2n^3} = -\frac{1}{2}$. **D.** $\lim \frac{n^2 - n + 1}{2n - 1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

A sai vì $\lim \frac{2n^2 - 3n}{n^3 + 3n} = 0$.

B sai vì $\lim \frac{n^2 - 3n + 2}{n^2 + n} = 1$.

C sai vì $\lim \frac{n^3 + 2n - 1}{n - 2n^3} = -\frac{1}{2}$.

D đúng $\lim \frac{n^2 - n + 1}{2n - 1} = \lim \frac{n^2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}\right)}{n\left(2 - \frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{n\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}\right)}{\left(2 - \frac{1}{n}\right)} = +\infty$.

Câu 43: $\lim\left(2n - 3n^3\right)$ là:

A. 2. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** -3.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Ta có $\lim\left(2n-3n^3\right)=\lim n^3\left(\frac{2}{n^2}-3\right)=-\infty.$.

$$\begin{cases}\lim n^3=+\infty\\ \lim\left(\frac{2}{n^2}-3\right)=-3<0\end{cases}.$$

Câu 44: $\lim\left(-3n^3+2n^2-5\right)$ bằng

A. -3. **B.** -6. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Ta có $\lim\left(-3n^3+2n^2-5\right)=\lim n^3\left(-3+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^3}\right)=-\infty.$

Vì $\begin{cases}\lim n^3=+\infty\\ \lim\left(-3+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^3}\right)=-3<0\end{cases}$

Câu 45: $\lim\frac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}$ bằng

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Ta có $\lim\frac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}=\lim n\left(\frac{\frac{2}{n^2}+3}{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)=+\infty.$

Vì $\begin{cases}\lim n=+\infty\\ \lim\left(\frac{\frac{2}{n^2}+3}{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)=\frac{3}{4}>0\end{cases}.$

Câu 46: Dãy số nào sau đây có giới hạn $+\infty$?

A. $u_n=\frac{9n^2+7n}{n+n^2}$. **B.** $u_n=2008n-2007n^2$.

C. $u_n=\frac{2007+2008n}{n+1}$. **D.** $u_n=n^2+1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

A sai vì $\lim u_n=\lim\frac{9n^2+7n}{n+n^2}=9.$

B sai vì $\lim u_n = \lim(2008n - 2007n^2) = -\infty$.

C sai vì $\lim u_n = \lim\dfrac{2007 + 2008n}{n+1} = 2008$.

D đúng $\lim u_n = u_n = \lim(n^2+1) = \lim n^2\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right) = +\infty$.

Câu 47: Dãy số nào sau đây có giới hạn là $-\infty$?

A. $u_n = 3n^2 - n$. **B.** $u_n = n^4 - 3n^3$.

C. $u_n = -n^2 + 4n^3$. **D.** $u_n = 3n^3 - 2n^4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

A sai vì $\lim u_n = \lim(3n^2 - n) = +\infty$.

B sai vì $\lim u_n = \lim(n^4 - 3n^3) = +\infty$.

C sai vì $\lim u_n = \lim(-n^2 + 4n^3) = +\infty$.

D đúng $\lim u_n = \lim(3n^3 - 2n^4) = -\infty$.

Câu 48: $\lim\dfrac{100n^3 + 7n - 9}{1000n^2 - n + 1}$ là

A. -9. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{1}{10}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Ta có $\lim\dfrac{100n^3 + 7n - 9}{1000n^2 - n + 1} = \lim n\left(\dfrac{100 + \dfrac{7}{n^2} - \dfrac{9}{n^3}}{1000 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}\right) = +\infty$.

Câu 49: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là $+\infty$?

A. $\lim\dfrac{2n^2 - 3n}{n^3 + 3n}$. **B.** $\lim\dfrac{n^2 - 3n + 2}{n^2 + n}$.

C. $\lim\dfrac{n^3 + 2n - 1}{n - 2n^2}$. **D.** $\lim\dfrac{n^2 - n + 1}{2n - 1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

A sai vì $\lim\dfrac{2n^2 - 3n}{n^3 + 3n} = 0$.

B sai vì $\lim\dfrac{n^2 - 3n + 2}{n^2 + n} = 1$.

C sai vì $\lim\dfrac{n^3 + 2n - 1}{n - 2n^2} = -\infty$.

D đúng $\lim \frac{n^2 - n + 1}{2n - 1} = +\infty.$

Câu 50: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\lim \frac{1}{2+3n} = +\infty$. **B.** $\lim \frac{n^2+5}{2n+1} = -\infty$.

C. $\lim \frac{2n^2+n+1}{3-n} = +\infty$. **D.** $\lim \frac{n^4+2}{n^3+1} = +\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

A sai vì $\lim \frac{1}{2+3n} = 0.$

B sai vì $\lim \frac{n^2+5}{2n+1} = +\infty.$

C sai vì $\lim \frac{2n^2+n+1}{3-n} = -\infty.$`

CHƯƠNG IV: GIỚI HẠN

BÀI 2: GIỚI HẠN HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

1. Giới hạn hữu hạn:

a. Giới hạn hữu hạn:

Cho $x_0 \in (a;b)$ và f là hàm số xác định trên tập $(a;b)\backslash\{x_0\}$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$, khi x dần tới x_0 (hoặc tại điểm x_0), nếu với mọi dãy số (x_n) trong tập $(a;b)\backslash\{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$.

Ta đều có $\lim f(x_n)=L$.

b. Giới hạn vô cực:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ nếu mọi dãy (x_n) trong tập $(a;b)\backslash\{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$

thì $\lim f(x_n)=+\infty$

2. Giới hạn của hàm số tại vô cực:

Định nghĩa: Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần tới $+\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$, nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a;+\infty)$ mà $\lim x_n = +\infty$, ta đều có $\lim f(x_n)=L$.

3. Các định lí:

a. **Định lí 1**: Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M \quad (L,M\in R)$. Khi đó:

- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=L\pm M$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=L.M$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[k.f(x)\right]=k.L \ (k\in R)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M} \ (M\neq 0)$

b. Định lí 2: Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$. Khi đó:

- $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right| = |L|$ - $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$

- Nếu $f(x)\ge 0$ với mọi $x\in J\setminus\{x_0\}$, trong đó J là một khoảng nào đó chứa x_0 thì $L\ge 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

c. Định lí 3: Giả sử J là một khoảng nào đó chứa x_0 và f, g, h là ba hàm số xác định trên tập hợp $J\setminus\{x_0\}$. Khi đó:

$$\begin{cases}\forall x\in J\setminus\{x_0\}: g(x)\le f(x)\le h(x)\\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = L\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$$

<u>4. Giới hạn một bên</u>

a. Định nghĩa:

- Giả sử hàm f xác định trên khoảng $(x_0;b)$, $x_0\in R$. Ta nói rằng hàm f có giới hạn bên phải là số thực L khi x dần đến x_0, kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$, nếu mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(x_0;b)$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$

- Giả sử hàm f xác định trên khoảng $(a;x_0)$, $x_0\in R$. Ta nói rằng hàm f có giới hạn bên trái là số thực L khi x dần đến x_0, kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$, nếu mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a;x_0)$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$

- Các định nghĩa: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ được phát biểu tương tự như trên.

b. Các định lí:

- $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$

- $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right| = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)} = 0$

- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L\ne 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ thì:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty \text{ neáu } L \text{ vaø } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \text{ cuøng daáu} \\ -\infty \text{ neáu } L \text{ vaø } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \text{ traùi daáu} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 \quad \text{neáu } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty \\ +\infty \text{ neáu } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \text{ vaø } L.g(x) > 0 \\ -\infty \text{ neáu } \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \text{ vaø } L.g(x) < 0 \end{cases}$$

5. <u>Các giới hạn đặc biệt:</u>

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = \begin{cases} +\infty \text{ neáu } k \text{ chaün} \\ -\infty \text{ neáu } k \text{ leû} \end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c = c$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{|x|} = +\infty$

<u>Quy tắc về giới hạn vô cực</u>

- *Quy tắc tìm giới hạn của tích* $f(x).g(x)$

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\to x_0^\pm \\ x\to\pm\infty}} f(x)$	$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\to x_0^\pm \\ x\to\pm\infty}} g(x)$	$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\to x_0^\pm \\ x\to\pm\infty}} f(x).g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

- *Quy tắc tìm giới hạn của thương* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\to x_0^\pm \\ x\to\pm\infty}} f(x)$	$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\to x_0^\pm \\ x\to\pm\infty}} g(x)$	*Dấu của* $g(x)$	$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\to x_0^\pm \\ x\to\pm\infty}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	*Tùy ý*	0
$L > 0$	0	$+$	$+\infty$
		$-$	$-\infty$
$L < 0$	0	$+$	$-\infty$
		$-$	$+\infty$

** Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định:* $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0.\infty$ *thì phải tìm cách khử dạng vô định.*

B. DẠNG BÀI TẬP

DẠNG 1: Sử dụng định nghĩa

Phương pháp: thay trực tiếp x_0 và biểu thức $f\left(x\right)$

Ví dụ 1: Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$. b) $\lim\limits_{x\to -1}\left|x-2\right|$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+1}{x-1}$

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 4}\left(3x^2-x+1\right)=3.4^2-4+1=45$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\left|x-2\right|=\left|-1-2\right|=3$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\dfrac{2^2+1}{2-1}=5$

DẠNG 2: Dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

Phương pháp: Tính $L=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}$, với $P\left(x_0\right)=Q\left(x_0\right)=0$

- Trường hợp 1: $P\left(x\right),Q\left(x\right)$ là các đa thức: Ta phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử và rút gọn.

Lưu ý: $\text{ax}^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)\Leftrightarrow a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$ với x_1,x_2 là nghiệm của pt

Ví dụ 2: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}\left(m,n\in\mathbb{N}*\right)$

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x-2\right)\left(x^2+2x+4\right)}{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}=\dfrac{12}{4}=3$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x-2\right)\left(x-3\right)}{\left(x-2\right)\left(x-5\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x-5}=\dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x-1\right)\left(x^{m-1}+x^{m-2}+.....+x+1\right)}{\left(x-1\right)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+.....+x+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^{m-1}+x^{m-2}+.....+x+1\right)}{\left(x^{n-1}+x^{n-2}+.....+x+1\right)}=\dfrac{m}{n}$

- **Trường hợp 2:** $P(x), Q(x)$ là các biểu thức chứa căn cùng bậc: Nhân liên hợp ở tử và mẫu.

Đối với biểu thức chứa căn thức thì nhân, chia lượng liên hợp bậc hai, bậc ba để đưa về dạng:

- $\sqrt{A}+B=\dfrac{A-B^2}{\sqrt{A}-B}$
- $\sqrt[3]{A}+B=\dfrac{A+B^3}{\sqrt[3]{A^2}-B.\sqrt[3]{A}+B^2}$
- $\sqrt{A}+\sqrt{B}=\dfrac{A-B}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}$
- $\sqrt[3]{A}-B=\dfrac{A-B^3}{\sqrt[3]{A^2}+B.\sqrt[3]{A}+B^2}$
- $\sqrt{A}-B=\dfrac{A-B^2}{\sqrt{A}+B}$
- $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\dfrac{A+B}{\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{A.B}+\sqrt[3]{B^2}}$
- $\sqrt{A}-\sqrt{B}=\dfrac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$
- $\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}=\dfrac{A-B}{\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{A.B}+\sqrt[3]{B^2}}$

Ví dụ 3: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5x-1}}{x^2-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}$

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2-\sqrt{4-x}\right)\left(2+\sqrt{4-x}\right)}{x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2+\sqrt{4-x}}=\dfrac{1}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5x-1}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{5x-1}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5x-1}\right)}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5x-1}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-4(x-1)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5x-1}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-4}{(x+1)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{5x-1}\right)}=\dfrac{-1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x+7}-2\right)\left(\sqrt[3]{x+7}^2+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x+7}^2+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{x+7}^2+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}=\dfrac{1}{12}$

- **Trường hợp 3:** $P(x), Q(x)$ là các biểu thức chứa căn khác bậc:

Giả sử: $P(x)=\sqrt[m]{u(x)}-\sqrt[n]{v(x)}$ với $\sqrt[m]{u(x_0)}=\sqrt[n]{v(x_0)}=a$

Ta phân tích $P(x)=\left(\sqrt[m]{u(x)}-a\right)+\left(a-\sqrt[n]{v(x)}\right)$

Ví dụ 4: Tính giới hạn sau :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$$

Giải

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{x+1}-1+1-\sqrt{1-x}}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}+\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}+\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

DẠNG 3: dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

Phương pháp: Tính $L=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$ với $P(x),Q(x)$ là các đa thức hoặc các biểu thức chứa căn.

- Trường hợp 1: $P(x),Q(x)$ là các đa thức thì chia cả tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của x.

- Trường hợp 2: $P(x),Q(x)$ có chứa căn thì có thể chia cả tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của x.

Lưu ý: $\sqrt{x^2}=|x|=\left[\begin{array}{ll} x & khi\, x\to+\infty \\ -x & khi\, x\to-\infty\end{array}\right.$. Khi đó $\lim_{x\to+\infty}|x|=\lim_{x\to+\infty}x$ *và* $\lim_{x\to-\infty}|x|=-\lim_{x\to-\infty}x$

Ví dụ 5 : Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}$ b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x-1)^3(x^2+x-1)^2}{(3x^5-1)(x^2+3x-5)}$

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-3}{\sqrt{4x^2+1}-x}$ d) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$

Giải

a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}}=2$$

b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x-1)^3(x^2+x-1)^2}{(3x^5-1)(x^2+3x-5)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{x}\right)^3\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)^2}{\left(3-\frac{1}{x^5}\right)\left(1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}=\frac{8}{3}$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{4x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-1}=\dfrac{2}{2-1}=2$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1}=\dfrac{2}{-1-1}=-1$

DẠNG 4: Dạng vô định $\infty-\infty$

Phương pháp : (giới hạn này thường chứa căn): Ta thường sử dụng phương pháp nhân liên hợp của tử và mẫu.

Ví dụ 6 : Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}-\sqrt{4x^2+2}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}-2x\right)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$

Giải

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{16x^4+3x+1}-(4x^2+2)}{\sqrt[4]{16x^4+3x+1}+\sqrt{4x^2+2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{16x^4+3x+1-(4x^2+2)^2}{\left(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}+\sqrt{4x^2+2}\right)\left(\sqrt{16x^4+3x+1}+4x^2+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-16x^2+3x-3}{\left(\sqrt[4]{16x^4+3x+1}+\sqrt{4x^2+2}\right)\left(\sqrt{16x^4+3x+1}+4x^2+2\right)}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2-x+1+2\sqrt{(x^2+1)(x^2-x)}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}+2x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4(x^4-x^3+x^2-x)-\left(2x^2+x-1\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}+2x\right)\left(2\sqrt{(x^2+1)(x^2-x)}+2x^2+x-1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4(x^4-x^3+x^2-x)-\left(2x^2+x-1\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}+2x\right)\left(2\sqrt{(x^2+1)(x^2-x)}+2x^2+x-1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-8x^3+7x^2-2x-1}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}+2x\right)\left(2\sqrt{(x^2+1)(x^2-x)}+2x^2+x-1\right)}=-\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-x\right)+\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)=M+N$

$$M=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}+x.\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+x^2}=\frac{1}{3}$$

$$N=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-1}=-\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)=\dfrac{-1}{6}$

DẠNG 5: Giới hạn 1 bên

Phương pháp: Áp dụng định lý giới hạn của một tích và một thương

Ví dụ 7 : Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^3-x^2}}{\sqrt{x-1}+1-x}$ c) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{|x-3|}{x-3}$

Giải

a) $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{x-2}{x^3}\right)$

$\lim\limits_{x\to0^-}(x-2)=-2<0$

Khi $x\to0^-\Rightarrow x<0\Rightarrow x^3<0$

Vậy $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{x-2}{x^3}\right)=+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^3-x^2}}{\sqrt{x-1}+1-x}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^2(x-1)}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{(x-1)^2}}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\left(1-\sqrt{x-1}\right)}$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{x}{\left(1-\sqrt{x-1}\right)}=1.$$

c) $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{|x-3|}{x-3}=\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{x-3}{x-3}=1\\ \lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{|x-3|}{x-3}=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{-x+3}{x-3}=-1\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to3^+}\frac{|x-3|}{x-3}\ne\lim_{x\to3^-}\frac{|x-3|}{x-3}$$

Vậy không tồn tại giới hạn trên.

DẠNG 6 : Giới hạn lượng giác – phần nâng cao

Phương pháp : Ta biến đổi về dạng $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

Hệ quả: 1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\tan x}=1$

2) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}=1$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\tan u(x)}{u(x)}=1$.

Ví dụ 8 : Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin mx-\cos mx}{1+\sin nx-\cos nx}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{2\sin\dfrac{3x}{2}}$

Giải

a) : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{ax}{2}}{x^2}=\dfrac{a}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{ax}{2}}{\dfrac{ax}{2}}\right)^2=\dfrac{a}{2}$.

b) Ta có: $\dfrac{1+\sin mx-\cos mx}{1+\sin nx-\cos nx}=\dfrac{2\sin^2\dfrac{mx}{2}+2\sin\dfrac{mx}{2}\cos\dfrac{mx}{2}}{2\sin^2\dfrac{nx}{2}+2\sin\dfrac{nx}{2}\cos\dfrac{nx}{2}}$

$=\dfrac{m}{n}\dfrac{\sin\dfrac{mx}{2}}{\dfrac{mx}{2}}.\dfrac{\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{nx}{2}}.\dfrac{\sin\dfrac{mx}{2}+\cos\dfrac{mx}{2}}{\sin\dfrac{nx}{2}+\cos\dfrac{nx}{2}}$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin mx-\cos mx}{1+\sin nx-\cos nx}=\dfrac{m}{n}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{mx}{2}}{\dfrac{mx}{2}}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{nx}{2}}.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{mx}{2}+\cos\dfrac{mx}{2}}{\sin\dfrac{nx}{2}+\cos\dfrac{nx}{2}}=\dfrac{m}{n}$.

c) Ta có $\dfrac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{x^2}=\dfrac{1-\cos x+\cos x\cos 2x(1-\cos 3x)+\cos x(1-\cos 2x)}{x^2}$

$=\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\cos x.\cos 2x\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}+\cos x\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x.\cos 2x.\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\cos x.\cos 2x\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\cos x\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

$=3$

d) Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{2\sin\dfrac{3x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sin\dfrac{3x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}x(\dfrac{\sin x}{x})^2.\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{3x}{2}}{\dfrac{3x}{2}}=0$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Giá trị $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{3x+2}$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $+\infty$.

Câu 2: Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+2x+1}{2x^3+2}$ là:

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

Câu 3: Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+2x^2+1}{2x^5+1}$ là:

A. -2. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 2.

Câu 4: Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to0}x^2\cos\dfrac{2}{nx}$ là:

A. Không tồn tại. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 5: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{3-x^2}$ bằng:

A. -2. **B.** $-\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** 2.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{\dfrac{4x^2-3x}{(2x-1)(x^3-2)}}$. Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to2}f(x)$:

A. $\dfrac{5}{9}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{9}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{9}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{2x^4+x^2-3}}$. Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 8: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+3x}{\sqrt{2x^2+3}}$ bằng:

A. $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 9: Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cos5x}{2x}$ là:

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

Câu 10: Giá tri đúng của $\lim\limits_{x\to 3}\frac{|x-3|}{x-3}$

A. Không tồn tại. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 11: $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x-5\sin 2x+\cos^2 x}{x^2+2}$ bằng:

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Câu 12: Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^4+8x}{x^3+2x^2+x+2}$ là:

A. $-\frac{21}{5}$. **B.** $\frac{21}{5}$. **C.** $-\frac{24}{5}$. **D.** $\frac{24}{5}$.

Câu 13: $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^3-x^2}}{\sqrt{x-1}+1-x}$ bằng:

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 14: $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-x+1}{x^2-1}$ bằng:

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 15: Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(4x^5-3x^3+x+1\right)$ là:

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 4. **D.** $+\infty$.

Câu 16: Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^4-x^3+x^2-x}$ là:

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 17: $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-x+3}}{2|x|-1}$ bằng:

A. 3. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)=(x+2)\sqrt{\frac{x-1}{x^4+x^2+1}}$. Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$:

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$.

C. 1. **D.** Không tồn tại.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-3 & \text{khi } x\ge 2\\ x-1 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$:

A. -1. **B.** 0.

C. 1. **D.** Không tồn tại.

Câu 20: Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)$:

A. $-\infty$. **B.** 0.

C. $+\infty$. **D.** Không tồn tại.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}$. Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$:

A. $-\infty$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $+\infty$.

Câu 22: Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

(I) $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)>0$ thì tồn tại ít nhất một số $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$

(II) $f(x)$ liên tục trên đoạn $(a;b]$ và trên $[a;b)$ nhưng không liên tục $(a;c)$

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (II).

C. Cả (I) và (II) đúng. **D.** Cả (I) và (II) sai.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$. Giá trị đúng của $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ là:

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $+\infty$.

Câu 24: $\lim\limits_{x\to -2}\frac{4x^3-1}{3x^2+x+2}$ bằng:

A $-\infty$. **B.** $-\frac{11}{4}$. **C.** $\frac{11}{4}$.. **D.** $+\infty$.

Câu 25: Giá trị đúng của $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^4+7}{x^4+1}$ là:

A. -1. **B.** 1. **C.** 7. **D.** $+\infty$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	**2.B**	**3.A**	**4.B**	**5.D**	**6.B**	**7.C**	**8.A**	**9.B**	**10.A**
11.B	**12.C**	**13.C**	**14.D**	**15.A**	**16.D**	**17.A**	**18.A**	**19.C**	**20.C**
21.A	**22.B**	**23.B**	**24.B**	**25.B**					

Câu 1: Giá trị $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{3x+2}$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn A.

Cách 1: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{3x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{5}{x}}{3+\frac{2}{x}}=0$

Cách 2: Bấm máy tính như sau: $\dfrac{5}{3x+2}$ + CACL + $x=10^9$ và so đáp án (với máy casio 570 VN Plus)

Cách 3: Dùng chức lim của máy VNCALL 570ES Plus: $\lim\dfrac{5}{3x+2}\Big|_{x\to 10^9}$ và so đáp án.

Câu 2: Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{2x^3+2}$ là:

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{2x^3+2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)^2}{2(x+1)(x^2-x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{2(x^2-x+1)}=0$

Cách 2: Bấm máy tính như sau: $\dfrac{x^2+2x+1}{2x^3+2}$ + CACL + $x=-1+10^{-9}$ và so đáp án.

Cách 3: Dùng chức lim của máy VNCALL 570ES Plus: $\lim\dfrac{x^2+2x+1}{2x^3+2}\Big|_{x\to -1+10^{-9}}$ và so đáp án.

Câu 3: Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+2x^2+1}{2x^5+1}$ là:

A. -2. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A.

Cách 1: $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+2x^2+1}{2x^5+1}=\frac{(-1)^3+2.(-1)^2+1}{2(-1)^5+1}=-2$

Cách 2: Bấm máy tính như sau: $\frac{x^3+2x^2+1}{2x^5+1}$ + CACL + $x=-1+10^{-9}$ và so đáp án.

Cách 3: Dùng chức lim của máy VNCALL 570ES Plus: $\lim\frac{x^3+2x^2+1}{2x^5+1}\Big|_{x\to -1+10^{-9}}$ và so đáp án.

Câu 4: Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{2}{nx}$ là:

A. Không tồn tại. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: $0\le\left|\cos\frac{2}{nx}\right|\le 1\Leftrightarrow 0\le\left|x^2\cos\frac{2}{nx}\right|\le x^2$

Mà $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ nên $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\frac{2}{nx}=0$

Cách 2: Bấm máy tính như sau: Chuyển qua chế độ Rad + $x^2\cos\frac{2}{nx}$ + CACL + $x=10^{-9}+n=10$ và so đáp án.

Câu 5: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3-x^2}$ bằng:

A. -2. **B.** $-\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3-x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x^2}-1}=2$

Cách 2: Bấm máy tính như sau: $\frac{2x^2-1}{3-x^2}$ + CACL + $x=10^9$ và so đáp án.

Cách 3: Dùng chức lim của máy VNCALL 570ES Plus: $\lim \left.\dfrac{2x^2-1}{3-x^2}\right|_{x\to 10^9}$ và so đáp án.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{\dfrac{4x^2-3x}{(2x-1)(x^3-2)}}$. Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$:

A. $\dfrac{5}{9}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{9}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{4x^2-3x}{(2x-1)(x^3-2)}}=\sqrt{\dfrac{4.2^2-3.2}{(2.2-1)(2^3-2)}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Cách 2: Bấm máy tính như sau: $\sqrt{\dfrac{4x^2-3x}{(2x-1)(x^3-2)}}$ + CACL + $x=2+10^{-9}$ và so đáp án.

Cách 3: Dùng chức lim của máy VNCALL 570ES Plus: $\lim\left.\sqrt{\dfrac{4x^2-3x}{(2x-1)(x^3-2)}}\right|_{x\to 2+10^{-9}}$ và so đáp án.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{2x^4+x^2-3}}$. Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn C.

Cách 1: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{2x^4+x^2-3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}{2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x^4}}}=0$

Cách 2: Bấm máy tính như sau: $\sqrt{\dfrac{x^2+1}{2x^4+x^2-3}}$ + CACL + $x=10^9$ và so đáp án.

Cách 3: Dùng chức lim của máy VNCALL 570ES Plus: $\lim\left.\sqrt{\dfrac{x^2+1}{2x^4+x^2-3}}\right|_{x\to 10^9}$ và so đáp án.

Câu 8: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+3x}{\sqrt{2x^2+3}}$ bằng:

A. $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Cách 1: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+3x}{\sqrt{2x^2+3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x^2}+3}{-\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Cách 2: Bấm máy tính như sau: $\dfrac{1+3x}{\sqrt{2x^2+3}}$ + CACL + $x=-10^9$ và so đáp án.

Cách 3: Dùng chức lim của máy VNCALL 570ES Plus: $\lim\dfrac{1+3x}{\sqrt{2x^2+3}}\Big|_{x\to-10^9}$ và so đáp án.

Câu 9: Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cos 5x}{2x}$ là:

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: $0\le|\cos 5x|\le 1\Rightarrow 0\le\left|\dfrac{\cos 5x}{2x}\right|\le\dfrac{1}{|2x|},\forall x\ne 0$

Mà $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{|2x|}=0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cos 5x}{2x}=0$

Cách 2: Bấm máy tính như sau: Chuyển qua chế độ Rad + $\dfrac{\cos 5x}{2x}$ + CACL + $x=-10^9$ và so đáp án.

Cách 3: Dùng chức lim của máy VNCALL 570ES Plus: chuyển chế độ Rad + $\lim\dfrac{\cos 5x}{2x}\Big|_{x\to-10^9}$ và so đáp án.

Câu 10: Giá tri đúng của $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{|x-3|}{x-3}$

A. Không tồn tại. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn A.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{|x-3|}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-3}{x-3}=1\\ \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{|x-3|}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-x+3}{x-3}=-1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{|x-3|}{x-3}\ne \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{|x-3|}{x-3}$$

Vậy không tồn tại giới hạn trên.

Câu 11: $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x-5\sin 2x+\cos^2 x}{x^2+2}$ bằng:

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B.

$$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x-5\sin 2x+\cos^2 x}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x}{x^2+2}-\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{5\sin 2x}{x^2+2}+\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\cos^2 x}{x^2+2}$$

$$A_1=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x^2}}=0$$

$$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{-5}{x^2+2}=0\le A_2=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{5\sin 2x}{x^2+2}\le \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{5}{x^2+2}=0\Rightarrow A_2=0$$

$$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{0}{x^2+2}=0\le A_3=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\cos^2 x}{x^2+2}\le \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x^2+2}=0\Rightarrow A_3=0$$

Vậy $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x-5\sin 2x+\cos^2 x}{x^2+2}=0$.

Câu 12: Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^4+8x}{x^3+2x^2+x+2}$ là:

A. $-\dfrac{21}{5}$. **B.** $\dfrac{21}{5}$. **C.** $-\dfrac{24}{5}$. **D.** $\dfrac{24}{5}$.

Lời giải

Chọn C.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^4+8x}{x^3+2x^2+x+2}$ thành $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+8x}{x^3+2x^2+x+2}$

$$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^4+8x}{x^3+2x^2+x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x^2+1)}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x(x^2-2x+4)}{(x^2+1)}=-\frac{24}{5}.$$

Câu 13: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^3-x^2}}{\sqrt{x-1}+1-x}$ bằng:

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn C.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^3-x^2}}{\sqrt{x-1}+1-x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2(x-1)}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{(x-1)^2}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\left(1-\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{\left(1-\sqrt{x-1}\right)}=1.$$

Câu 14: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-x+1}{x^2-1}$ bằng:

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn D.

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-x+1}{x^2-1}=+\infty$ vì $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2-x+1\right)=1>0$ và $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2-1\right)=0; x^2-1>0$.

Câu 15: Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(4x^5-3x^3+x+1\right)$ là:

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 4. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn A.

$\lim\limits_{x\to -\infty}\left(4x^5-3x^3+x+1\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}x^5\left(4-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}\right)=-\infty..$

Câu 16: Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^4-x^3+x^2-x}$ là:

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn D.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^4-x^3+x^2-x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^4\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}=+\infty.$

Câu 17: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-x+3}}{2|x|-1}$ bằng:

A. 3. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn A.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-x+3}}{2|x|-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{2x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{\left(2-\frac{1}{x}\right)}=3.$$

Câu 18: Cho hàm số $f(x)=(x+2)\sqrt{\dfrac{x-1}{x^4+x^2+1}}$. Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$:

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$.

C. 1. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn A.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+2)\sqrt{\frac{x-1}{x^4+x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{(x-1)(x+2)}{x^4+x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}} = 0.$$

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2-3 & \text{khi } x \ge 2 \\ x-1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$:

A. -1. **B.** 0.

C. 1. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2-3) = 1$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x-1) = 1$

Vì $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$ nên $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$.

Câu 20: Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)$:

A. $-\infty$. **B.** 0.

C. $+\infty$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Chọn C.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{x-2}{x^3}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0^-}(x-2) = -2 < 0$

Khi $x \to 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow x^3 < 0$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{x-2}{x^3}\right) = +\infty$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x^3-1} - \frac{1}{x-1}$. Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$:

A. $-\infty$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn A.

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{-x^2 - x}{x^3 - 1} \right)$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \left(-x^2 - x \right) = -2$

Khi $x \to 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x^3 - 1 > 0$

Vậy $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$.

Câu 22: Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

(I) $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) > 0$ thì tồn tại ít nhất một số $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = 0$

(II) $f(x)$ liên tục trên đoạn $(a;b]$ và trên $[a;b)$ nhưng không liên tục $(a;c)$

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (II).

C. Cả (I) và (II) đúng. **D.** Cả (I) và (II) sai.

Câu 23: Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2 - 9}}$. Giá trị đúng của $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ là:

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x^2 - 9}} = \lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{\sqrt{(x-3)(x+3)}}. = \lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{(x-3)}}{\sqrt{(x+3)}} = 0.$$

Câu 24: $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4x^3 - 1}{3x^2 + x + 2}$ bằng:

A $-\infty$. **B.** $-\dfrac{11}{4}$. **C.** $\dfrac{11}{4}$.. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4x^3 - 1}{3x^2 + x + 2} = -\dfrac{11}{4}$.

Câu 25: Giá trị đúng của $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 + 7}{x^4 + 1}$ là:

A. -1. **B.** 1. **C.** 7. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^4 + 7}{x^4 + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \dfrac{7}{x^4}}{1 + \dfrac{1}{x^4}} = 1$.

BÀI 3: HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Hàm số liên tục

a) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Chú ý: *Một hàm số không liên tục tại điểm x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm đó.*

b) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

c) Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$; $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Chú ý: *Đồ thị của một hàm số liên tục là một " đường liền" trên khoảng đó.*

2. Các định lí:

a) Định lí 1:

- Hàm số đa thức liên tục trên toàn tập số thực R.

- Hàm số phân thức hữu tỉ (tức là thương của hai đa thức), hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

b) Định lí 2:

Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại x_0. Khi đó:

- Các hàm số $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x).g(x)$ cũng liên tục tại x_0

- Hàm số $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$

c) Định lí 3:

Nếu hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và $f\left(a\right).f\left(b\right) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in \left(a;b\right)$ sao cho $f\left(c\right) = 0$.

Mệnh đề tương đương:

Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và $f\left(a\right).f\left(b\right) < 0$. Khi đó phương trình $f\left(x\right) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $\left(a;b\right)$.

Mở rộng:

Nếu $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$. Đặt $m = \min\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right), \quad M = \max\limits_{\left[a;b\right]} f\left(x\right)$. Khi đó với mọi $T \in \left(m;M\right)$ luôn tồn tại ít nhất một số $c \in \left(a;b\right)$ sao cho $f\left(c\right) = T$.

B. CÁC DẠNG TOÁN Các dạng toán xét tính liên tục của hàm số

<u>Dạng 1</u>: Cho hàm số $f\left(x\right) = \begin{cases} f_1\left(x\right), \ khi\, x \neq x_0 \\ f_2\left(x\right), \ khi\, x = x_0 \end{cases}$

- Tìm tập xác định của $f\left(x\right)$ và tính $f\left(x_0\right) = f_2\left(x_0\right)$

- Tính $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right) = \lim\limits_{x \to x_0} f_1\left(x\right)$

- So sánh $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right)$ với $f\left(x_0\right)$:

  + Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right) = f\left(x_0\right)$ thì hàm số đã cho liên tục tại x_0.

  + Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right) \neq f\left(x_0\right)$ thì hàm số đã cho không liên tục tại x_0 (hay hàm số gián đoạn tại x_0).

Dạng 2: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} f_1\left(x\right), \, khi\, x<x_0 \\ f_2\left(x\right), khi\, x\ge x_0 \end{cases}$

- Tìm tập xác định của $f\left(x\right)$ và tính $f\left(x_0\right)=f_2\left(x_0\right)$

- Tính $\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f_2\left(x\right)$ và $\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f_1\left(x\right)$

- So sánh $\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)$, $f\left(x_0\right)$ rồi kết luận.

  + Nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right) = f\left(x_0\right)$ thì hàm số đã cho liên tục tại x_0.

  + Nếu ngược lại, thì hàm số đã cho gián đoạn tại x_0.

Dạng 3: Bài toán về số nghiệm của phương trình

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và $f\left(a\right).f\left(b\right)<0$. Khi đó phương trình $f\left(x\right)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $\left(a;b\right)$.

Ví dụ 1: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \left(x\ne 1\right) \\ a & \left(x=1\right) \end{cases}$, với a là hằng số.

Xét tính liên tục của hàm số tại $x=1$.

Giải

Hàm số xác định với mọi $x\in R$

Ta có:

- $f\left(1\right)=a$
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(x+1\right)=2$
- $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)=f\left(1\right)\Leftrightarrow a=2$

  Nếu $a=2$ thì hàm số liên tục tại $x=1$.

Nếu $a \neq 2$ thì hàm số không liên tục tại $x = 1$.

<u>Ví dụ 2:</u> Cho hàm số $f\left(x\right) = \begin{cases} \text{ax} + 2 & , x \geq 1 \\ x^2 + x - 1, & x < 1 \end{cases}$.

Xét tính liên tục của hàm số trên toàn trục số.

Giải:

- $x > 1$, ta có $f\left(x\right) = \text{ax} + 2$ hàm số liên tục trên R.
- $x < 1$, ta có $f\left(x\right) = x^2 + x - 1$ hàm số liên tục trên R.
- $x = 1$, ta có:

  $f\left(1\right) = \text{a+2}$

  $\lim\limits_{x \to 1^+} f\left(x\right) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\text{ax} + 2\right) = a + 2$

  $\lim\limits_{x \to 1^-} f\left(x\right) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(x^2 + x - 1\right) = 1$

  $\lim\limits_{x \to 1^+} f\left(x\right) = \lim\limits_{x \to 1^-} f\left(x\right) \Leftrightarrow a + 2 = 1 \Leftrightarrow a = -1$

  Nếu $a = -1$ thì hàm số liên tục tại $x = 1$

  Nếu $a \neq -1$ thì hàm số gián đoạn tại $x = 1$.

Vậy hàm số liên tục trên toàn trục số nếu $a = -1$.

Hàm số liên tục trên $\left(-\infty;1\right) \cup \left(1;+\infty\right)$ nếu $a \neq -1$

<u>Ví dụ 3 :</u> Chứng minh phương trình: $2\text{x}^4 + 4\text{x}^2 + x - 3 = 0$ có ít nhất hai nghiệm thuộc $(-1;1)$.

Giải:

Đặt $f(x) = 2\text{x}^4 + 4\text{x}^2 + x - 3 \Rightarrow f(x)$ liên tục trên R

$f(-1) = 2, f(0) = -3 \Rightarrow f(-1).f(0) < 0 \Rightarrow$ PT $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm $c_1 \in (-1;0)$

$f(0) = -3, f(1) = 4 \Rightarrow f(0).f(1) < 0 \Rightarrow$ PT $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm $c_2 \in (0;1)$

Mà $c_1 \neq c_2 \Rightarrow$ PT $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm thuộc khoảng $(-1;1)$.

<u>**Ví dụ 4 :**</u> Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm với mọi m:

$$(9-5m)x^5+(m^2-1)x^4-1=0$$

Giải:

Đặt $f(x)=(9-5m)x^5+(m^2-1)x^4-1 \Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

$f(0)=-1,\ f(1)=\left(m-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \Rightarrow f(0).f(1)<0$

$\Rightarrow$ Phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng (0; 1) với mọi m

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ và $f\left(2\right)=m^2-2$ với $x\neq 2$. Giá trị của m để $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=2$ là:

A. $\sqrt{3}$. B. $-\sqrt{3}$. C. $\pm\sqrt{3}$. D. ± 3

Câu 2: Cho hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x^2-4}$. Chọn câu **đúng** trong các câu sau:

(I) $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=2$.

(II) $f\left(x\right)$ gián đoạn tại $x=2$.

(III) $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-2;2\right]$.

A. Chỉ $\left(I\right)$ và $\left(III\right)$. B. Chỉ $\left(I\right)$.

C. Chỉ $\left(II\right)$. D. Chỉ $\left(II\right)$ và $\left(III\right)$

Câu 3: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^3-x+6}} & x\neq 3;\ x\neq 2\\ b+\sqrt{3} & x=3;\ b\in\mathbb{R}\end{cases}$.

Tìm b để $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=3$.

A. $\sqrt{3}$. B. $-\sqrt{3}$. C. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 4: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

$\left(I\right)$ $f\left(x\right)$ gián đoạn tại $x=1$.

$\left(II\right)$ $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=1$.

$\left(III\right)$ $\lim\limits_{x\to 1}f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$

A. Chỉ $\left(I\right)$. B. Chỉ $\left(I\right)$.

C. Chỉ $\left(I\right)$ và $\left(III\right)$. D. Chỉ $\left(II\right)$ và $\left(III\right)$.

Câu 5: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+8}-2}{\sqrt{x+2}} & x>-2\\ 0 & x=-2\end{cases}$. Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

$\left(I\right)$ $\lim\limits_{x\to -2^{+}} f\left(x\right)=0$.

$\left(II\right)$ $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=-2$.

$\left(III\right)$ $f\left(x\right)$ gián đoạn tại $x=-2$.

A. Chỉ $\left(I\right)$ và $\left(III\right)$.
B. Chỉ $\left(I\right)$ và $\left(II\right)$.
C. Chỉ $\left(I\right)$.
D. Chỉ $\left(I\right)$

Câu 6: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{4-x^{2}} & -2\le x\le 2\\ 1 & x>2\end{cases}$. Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:.

$\left(I\right)$ $f\left(x\right)$ không xác định tại $x=3$.

$\left(II\right)$ $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=-2$.

$\left(III\right)$ $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=2$

A. Chỉ $\left(I\right)$.
B. Chỉ $\left(I\right)$ và $\left(II\right)$.
C. Chỉ $\left(I\right)$ và $\left(III\right)$.
D. Cả $\left(I\right)$; $\left(II\right)$; $\left(III\right)$ đều sai.

Câu 7: Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

$\left(I\right)$ $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^{2}-1}}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$\left(II\right)$ $f\left(x\right)=\dfrac{\sin x}{x}$ có giới hạn khi $x\to 0$.

$\left(III\right)$ $f\left(x\right)=\sqrt{9-x^{2}}$ liên tục trên đoạn $\left[-3;3\right]$.

A. Chỉ (I) và (II). B. Chỉ (II) và (III).

C. Chỉ (II). D. Chỉ (III).

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 5x}{5x} & x\neq 0\\ a+2 & x=0\end{cases}$. Tìm a để $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

A. 1. B. -1. C. -2. D. 2.

Câu 9: Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

(I) $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)>0$ thì tồn tại ít nhất một số $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$.

(II) $f(x)$ liên tục trên đoạn $(a;b]$ và trên $[b;c)$ nhưng không liên tục $(a;c)$

A. Chỉ (I). B. Chỉ (II).

C. Cả (I) và (II) đúng. D. Cả (I) và (II) sai.

Câu 10: Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

I. $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có nghiệm.

II. $f(x)$ không liên tục trên $[a;b]$ và $f(a).f(b)\geq 0$ thì phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm.

A. Chỉ I đúng. B. Chỉ II đúng.

C. Cả I và II đúng. D. Cả I và II sai.

Câu 11: Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

(I). $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ liên tục với mọi $x\neq 1$.

(II). $f(x)=\sin x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(III). $f(x)=\frac{|x|}{x}$ liên tục tại $x=1$.

A. Chỉ (I) đúng.

B. Chỉ (I) và (II).

C. Chỉ (I) và (III).

D. Chỉ (II) và (III).

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-3}{x-\sqrt{3}} & ,x\neq\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3} & ,x=\sqrt{3}\end{cases}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

(I). $f(x)$ liên tục tại $x=\sqrt{3}$.

(II). $f(x)$ gián đoạn tại $x=\sqrt{3}$.

(III). $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. Chỉ (I) và (II).

B. Chỉ (II) và (III).

C. Chỉ (I) và (III).

D. Cả $(I),(II),(III)$ đều đúng.

Câu 13: Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

(I). $f(x)=x^5-x^2+1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(II). $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ liên tục trên khoảng $(-1;1)$.

(III). $f(x)=\sqrt{x-2}$ liên tục trên đoạn $[2;+\infty)$.

A. Chỉ (I) đúng.

B. Chỉ (I) và (II).

C. Chỉ (II) và (III).

D. Chỉ (I) và (III).

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & ,x>1\\ x^2+3 & ,x<1\\ k^2 & ,x=1\end{cases}$. Tìm k để $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

A. $k\neq\pm2$. **B.** $k\neq2$. **C.** $k\neq-2$. **D.** $k\neq\pm1$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{9-x}}{x} & ,0<x<9\\ m & ,x=0\\ \dfrac{3}{x} & ,x\geq9\end{cases}$.

Tìm m để $f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ là.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** 1.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+5x+6}$.Khi đó hàm số $y=f(x)$ liên tục trên các khoảng nào sau đây?

A. $(-3;2)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(2;3)$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=x^3-1000x^2+0,01$. Phương trình $f(x)=0$ có nghiệm thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

I. $(-1;0)$. II. $(0;1)$. III. $(1;2)$.

A. Chỉ I. **B.** Chỉ I và II. **C.** Chỉ II. **D.** Chỉ III.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x} & ,x\neq0;x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})\\ 0 & ,x=0\end{cases}$.

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên các khoảng nào sau đây?

A. $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

C. $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$. D. $(-\infty;+\infty)$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} a^2x^2 & , x\le\sqrt{2}, a\in\mathbb{R} \\ (2-a)x^2 & , x>\sqrt{2} \end{cases}$. Giá trị của a để $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ là:

A. 1 và 2. B. 1 và -1.

C. -1 và 2. D. 1 và -2.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2 & , x\ge 1 \\ \dfrac{2x^3}{1+x} & , 0\le x<1 \\ x\sin x & , x<0 \end{cases}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. B. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

C. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. D. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	**2.B**	**3.D**	**4.C**	**5.B**	**6.B**	**7.B**	**8.B**	**9.D**	**10.A**
11.D	**12.C**	**13.D**	**14.A**	**15.C**	**16.B**	**17.B.**	**18.A**	**19.D**	**20.A**

Hướng dẫn giải

Câu 1: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ và $f\left(2\right)=m^2-2$ với $x\neq 2$. Giá trị của m để $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=2$ là:

A. $\sqrt{3}$. **B.** $-\sqrt{3}$. **C.** $\pm\sqrt{3}$. **D.** ± 3

Lời giải

Chọn C

Hàm số liên tục tại $x=2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2}f\left(x\right)=f\left(2\right)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to 2}\left(x-1\right)=1$.

Vậy $m^2-2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\sqrt{3} \\ m=-\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Câu 2: Cho hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x^2-4}$. Chọn câu **đúng** trong các câu sau:

(I) $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=2$.

(II) $f\left(x\right)$ gián đoạn tại $x=2$.

(III) $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-2;2\right]$.

A. Chỉ $\left(I\right)$ và $\left(III\right)$. **B.** Chỉ $\left(I\right)$.

C. Chỉ $\left(II\right)$. **D.** Chỉ $\left(II\right)$ và $\left(III\right)$

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $D=\left(-\infty;-2\right]\cup\left[2;+\infty\right)$.

$\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2-4} = 0$.

$f\left(2\right) = 0$.

Vậy hàm số liên tục tại $x = 2$.

Câu 3: Cho hàm số $f\left(x\right) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^3-x+6}} & x \neq 3;\ x \neq 2 \\ b+\sqrt{3} & x = 3;\ b \in \mathbb{R} \end{cases}$. Tìm b để $f\left(x\right)$ liên tục tại $x = 3$

A. $\sqrt{3}$. **B.** $-\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số liên tục tại $x = 3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3} f\left(x\right) = f\left(3\right)$.

$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^3-x+6}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

$f\left(3\right) = b+\sqrt{3}$.

Vậy: $b+\sqrt{3} = \sqrt{\dfrac{1}{3}} \Leftrightarrow b = -\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{-2}{\sqrt{3}}$.

Câu 4: Cho hàm số $f\left(x\right) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

$\left(I\right)$ $f\left(x\right)$ gián đoạn tại $x = 1$.

$\left(II\right)$ $f\left(x\right)$ liên tục tại $x = 1$.

$\left(III\right)$ $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right) = \dfrac{1}{2}$

A. Chỉ $\left(I\right)$. **B.** Chỉ $\left(I\right)$.

C. Chỉ $\left(I\right)$ và $\left(III\right)$. **D.** Chỉ $\left(II\right)$ và $\left(III\right)$.

Lời giải

Chọn C.

$D = \mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$

$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$

Hàm số không xác định tại $x=1$. Nên hàm số gián đoạn tại $x=1$..

Câu 5: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2x+8}-2}{\sqrt{x+2}} & x>-2\\ 0 & x=-2\end{cases}$. Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

$\left(I\right)$ $\lim_{x\to -2^{+}}f\left(x\right)=0$.

$\left(II\right)$ $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=-2$.

$\left(III\right)$ $f\left(x\right)$ gián đoạn tại $x=-2$.

A. Chỉ $\left(I\right)$ và $\left(III\right)$. **B.** Chỉ $\left(I\right)$ và $\left(II\right)$. **C.** Chỉ $\left(I\right)$. **D.** Chỉ $\left(I\right)$

Lời giải

Chọn B.

$\lim_{x\to -2^{+}}\frac{\sqrt{2x+8}-2}{\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to -2^{+}}\frac{2x+8-4}{\left(\sqrt{2x+8}+2\right)\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to -2^{+}}\frac{2\sqrt{x+2}}{\left(\sqrt{2x+8}+2\right)}=0$.

Vậy $\lim_{x\to -2^{+}}f\left(x\right)=f\left(-2\right)$ nên hàm số liên tục tại $x=-2$..

Câu 6: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{4-x^{2}} & -2\le x\le 2\\ 1 & x>2\end{cases}$. Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:.

$\left(I\right)$ $f\left(x\right)$ không xác định tại $x=3$.

$\left(II\right)$ $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=-2$.

$\left(III\right)$ $\lim_{x\to 2}f\left(x\right)=2$

A. Chỉ $\left(I\right)$.

B. Chỉ $\left(I\right)$ và $\left(II\right)$.

C. Chỉ $\left(I\right)$ và $\left(III\right)$.

D. Cả $\left(I\right)$; $\left(II\right)$; $\left(III\right)$ đều sai.

Lời giải

Chọn **B.**

$D=[-2;\,2]$

$f(x)$ không xác định tại $x=3$.

$\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{4-x^2}=0$; $f(-2)=0$. Vậy hàm số liên tục tại $x=-2$.

$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2}=0$; $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=1$. Vậy không tồn tại giới hạn của hàm số khi $x\to 2$..

Câu 7: Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

(I) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(II) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ có giới hạn khi $x\to 0$.

(III) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ liên tục trên đoạn $[-3;3]$.

A. Chỉ (I) và (II). **B.** Chỉ (II) và (III).

C. Chỉ (II). **D.** Chỉ (III).

Lời giải

Chọn **B.**

Dễ thấy kđ (I) sai, Kđ (II) là lí thuyết.

Hàm số: $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ liên tục trên khoảng $(-3;3)$. Liên tục phải tại 3 và liên tục trái tại -3.

Nên $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ liên tục trên đoạn $[-3;3]$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 5x}{5x} & x\neq 0\\ a+2 & x=0\end{cases}$. Tìm a để $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

A. 1. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải

Chọn **B.**

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=1$; $f(0)=a+2$.

Vậy để hàm số liên tục tại $x=0$ thì $a+2=1 \Leftrightarrow a=-1$.

Câu 9: Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

(I) $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)>0$ thì tồn tại ít nhất một số $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$.

(II) $f(x)$ liên tục trên đoạn $(a;b]$ và trên $[b;c)$ nhưng không liên tục $(a;c)$

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (II).

C. Cả (I) và (II) đúng. **D.** Cả (I) và (II) sai.

Lời giải

Chọn D.

KĐ 1 sai.

KĐ 2 sai.

Câu 10: Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

I. $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có nghiệm.

II. $f(x)$ không liên tục trên $[a;b]$ và $f(a).f(b)\geq 0$ thì phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm.

A. Chỉ I đúng. **B.** Chỉ II đúng.

C. Cả I và II đúng. **D.** Cả I và II sai.

Lời giải

Chọn **A.**

Câu 11: Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

(I). $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ liên tục với mọi $x\neq 1$.

(II). $f(x)=\sin x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(III). $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ liên tục tại $x=1$.

A. Chỉ (I) đúng.

B. Chỉ (I) và (II).

C. Chỉ (I) và (III).

D. Chỉ (II) và (III).

Lời giải

Chọn **D.**

Ta có (II) đúng vì hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của tập xác định.

Ta có (III) đúng vì $f(x)=\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases}\dfrac{x}{x} & \text{, khi } x\geq 0\\ -\dfrac{x}{x} & \text{, khi } x<0\end{cases}$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=1$.

Vậy hàm số $y=f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ liên tục tại $x=1$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}} & , x\neq\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3} & , x=\sqrt{3}\end{cases}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

(I). $f(x)$ liên tục tại $x=\sqrt{3}$.

(II). $f(x)$ gián đoạn tại $x=\sqrt{3}$.

(III). $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. Chỉ (I) và (II).

B. Chỉ (II) và (III).

C. Chỉ (I) và (III).

D. Cả $(I),(II),(III)$ đều đúng.

Lời giải

Chọn **C.**

Với $x \neq \sqrt{3}$ ta có hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}$ liên tục trên khoảng $\left(-\infty;\sqrt{3}\right)$ và $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$, (1).

Với $x=\sqrt{3}$ ta có $f\left(\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}$ và $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} f(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}=2\sqrt{3}=f\left(\sqrt{3}\right)$ nên hàm số liên tục tại $x=\sqrt{3}$, (2)

Từ (1) và (2) ta có hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 13: Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

(I). $f(x)=x^5-x^2+1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(II). $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ liên tục trên khoảng $(-1;1)$.

(III). $f(x)=\sqrt{x-2}$ liên tục trên đoạn $[2;+\infty)$.

A. Chỉ (I) đúng.

B. Chỉ (I) và (II).

C. Chỉ (II) và (III).

D. Chỉ (I) và (III).

Lời giải

Chọn **D.**

Ta có (I) đúng vì $f(x)=x^5-x^2+1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có (III) đúng vì $f(x)=\sqrt{x-2}$ liên tục trên $(2;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=0$ nên hàm số liên tục trên $[2;+\infty)$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & ,x>1\\ x^2+3 & ,x<1\\ k^2 & ,x=1\end{cases}$. Tìm k để $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

A. $k\neq \pm 2$. **B.** $k\neq 2$. **C.** $k\neq -2$. **D.** $k\neq \pm 1$.

Lời giải

Chọn **A.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Với $x=1$ ta có $f(1)=k^2$

Với $x\neq 1$ ta có

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+3)=4$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)^2=4$ suy ra $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=4$.

Vậy để hàm số gián đoạn tại $x=1$ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq k^2 \Leftrightarrow k^2\neq 4 \Leftrightarrow k\neq \pm 2$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{9-x}}{x} & ,\ 0<x<9\\ m & ,\ x=0\\ \dfrac{3}{x} & ,\ x\geq 9\end{cases}$. Tìm m để $f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ là.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn **C.**

TXĐ: $D=[0;+\infty)$.

Với $x=0$ ta có $f(0)=m$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3-\sqrt{9-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{3+\sqrt{9-x}}=\dfrac{1}{6}$.

Vậy để hàm số liên tục trên $[0;+\infty)$ khi $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=m \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{6}$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+5x+6}$.Khi đó hàm số $y=f(x)$ liên tục trên các khoảng nào sau đây?

A. $(-3;2)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Chọn **B.**

Hàm số có nghĩa khi $x^2+5x+6\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -3 \\ x\neq -2 \end{cases}$.

Vậy theo định lí ta có hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+5x+6}$ liên tục trên khoảng $(-\infty;-3)$; $(-3;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=x^3-1000x^2+0,01$. Phương trình $f(x)=0$ có nghiệm thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

I. $(-1;0)$. II. $(0;1)$. III. $(1;2)$.

A. Chỉ I. **B.** Chỉ I và II. **C.** Chỉ II. **D.** Chỉ III.

Lời giải

Chọn **B.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Hàm số $f\left(x\right)=x^3-1000x^2+0,01$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\left[-1;0\right]$, $\left[0;1\right]$ và $\left[1;2\right]$, $\left(1\right)$.

Ta có $f\left(-1\right)=-1000,99$; $f\left(0\right)=0,01$ suy ra $f\left(-1\right).f\left(0\right)<0$, $\left(2\right)$.

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra phương trình $f\left(x\right)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $\left(-1;0\right)$.

Ta có $f\left(0\right)=0,01$; $f\left(1\right)=-999,99$ suy ra $f\left(0\right).f\left(1\right)<0$, $\left(3\right)$.

Từ $\left(1\right)$ và $\left(3\right)$ suy ra phương trình $f\left(x\right)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $\left(0;1\right)$.

Ta có $f\left(1\right)=-999,99$; $f\left(2\right)=-39991,99$ suy ra $f\left(1\right).f\left(2\right)>0$, $\left(4\right)$.

Từ $\left(1\right)$ và $\left(4\right)$ ta chưa thể kết luận về nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=0$ trên khoảng $\left(1;2\right)$.

Câu 18: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x} & ,x\neq 0;x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)\\ 0 & ,x=0\end{cases}$.

Hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên các khoảng nào sau đây?

A. $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

C. $\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$. **D.** $\left(-\infty;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn **A.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Với $x=0$ ta có $f(0)=0$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$ hay $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$.

Vậy hàm số gián đoạn tại $x=0$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} a^2x^2 & , x\le\sqrt{2}, a\in\mathbb{R} \\ (2-a)x^2 & , x>\sqrt{2}\end{cases}$.

Giá trị của a để $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ là:

A. 1 và 2.

B. 1 và -1.

C. -1 và 2.

D. 1 và -2.

Lời giải

Chọn **D.**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Với $x>\sqrt{2}$ ta có hàm số $f(x)=a^2x^2$ liên tục trên khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Với $x<\sqrt{2}$ ta có hàm số $f(x)=(2-a)x^2$ liên tục trên khoảng $\left(-\infty;\sqrt{2}\right)$.

Với $x=\sqrt{2}$ ta có $f\left(\sqrt{2}\right)=2a^2$.

$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+}(2-a)x^2=2(2-a)$; $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-}a^2x^2=2a^2$.

Để hàm số liên tục tại $x=\sqrt{2}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-} f(x)=f\left(\sqrt{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2a^2=2(2-a)\Leftrightarrow a^2+a-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\ a=-2\end{array}\right.$.

Vậy $a=1$ hoặc $a=-2$ thì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2 & , x\ge 1 \\ \dfrac{2x^3}{1+x} & , 0\le x<1 \\ x\sin x & , x<0 \end{cases}$.

Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. **B.** $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

C. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **D.** $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$.

Lời giải

Chọn **A.**

TXĐ:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Với $x>1$ ta có hàm số $f(x)=x^2$ liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$. (1)

Với $0<x<1$ ta có hàm số $f(x)=\dfrac{2x^3}{1+x}$ liên tục trên khoảng $(0;1)$. (2)

Với $x<0$ ta có $f(x)=x\sin x$ liên tục trên khoảng $(-\infty;0)$. (3)

Với $x=1$ ta có $f(1)=1$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^2=1$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^3}{1+x}=1$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1=f(1)$.

Vậy hàm số liên tục tại $x=1$.

Với $x=0$ ta có $f(0)=0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x^3}{1+x}=0$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x.\sin x)$

$=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2.\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=0$ suy ra $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$.

Vậy hàm số liên tục tại $x = 0$. (4)

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.